§4. 第一基本形式

空間内の曲面の接平面は 2 次元のベクトル空間となるが, 更に自然な内積を考えることができる. このことから曲面に対して第一基本形式というものを定めることができる. 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

に対して, $(u_0, v_0) \in D$ を固定しておく. Π を $p(u_0, v_0)$ における p の接平面とすると,

$$\Pi = \{p(u_0, v_0) + p_u(u_0, v_0)(u - u_0) + p_v(u_0, v_0)(v - v_0) \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

であり, Π は 3 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の 2 次元部分空間

$$\{p_u(u_0, v_0)u + p_v(u_0, v_0)v \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

と同一視することができる. 以下では, この部分空間も Π と表すことにする.

$\mathbf{R}^3$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を用いて,

$$p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \in \Pi \quad ((u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbf{R}^2)$$

に対して,

$$\langle p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \rangle \in \mathbf{R}$$

を対応させる. このとき, この対応は Π の内積を定める.

一方, 接平面の元は曲面上の曲線の微分を用いても表すことができる. 空間曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

の像が p の像に含まれているとする. このとき, γ を p 上の曲線という. γ は $[a, b]$ から D への写像と p を合成することにより,

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表すことができる. 合成関数の微分法より,

$$\dot{\gamma} = p_u\dot{u} + p_v\dot{v}$$

だから, 特に

$$c \in [a, b], \quad \gamma(c) = p(u_0, v_0)$$

のとき,

$$u_1 = \dot{u}(c), \quad v_1 = \dot{v}(c)$$

とおくと,

$$\dot{\gamma}(c) = p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1$$

となる.

また,

$$\begin{aligned}\|\dot{\gamma}\|^2 &= \langle p_u\dot{u} + p_v\dot{v}, p_u\dot{u} + p_v\dot{v}\rangle \\ &= \langle p_u, p_u\rangle\dot{u}^2 + 2\langle p_u, p_v\rangle\dot{u}\dot{v} + \langle p_v, p_v\rangle\dot{v}^2\end{aligned}$$

だから, D で定義された関数 E, F, G を

$$E = \langle p_u, p_u \rangle, \quad F = \langle p_u, p_v \rangle, \quad G = \langle p_v, p_v \rangle$$

により定めると,

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

となる. 特に, γ の長さは

$$\int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

である.

上の式の根号の中身に注目し,

$$\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$$

とおき, これを p の第一基本形式という. du^2, $dudv$, dv^2 というものには数学的な意味があるが, ここでは形式的に考えることにする.

例 4.1 関数のグラフを

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表しておくと,

$$p_u = (1, 0, f_u), \quad p_v = (0, 1, f_v)$$

である. よって,

$$\langle p_u, p_u \rangle = 1 + f_u^2, \quad \langle p_u, p_v \rangle = f_u f_v, \quad \langle p_v, p_v \rangle = 1 + f_v^2$$

である. したがって, p の第一基本形式は

$$(1 + f_u^2)\,du^2 + 2f_u f_v\,dudv + (1 + f_v^2)\,dv^2$$

である.

第一基本形式は曲面上の曲線の長さを求める場合ばかりでなく, 曲面の面積を求める場合にも現れる. 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

に対して, $\|p_u \times p_v\|\,dudv$ を面積要素という. また, 面積要素が D で重積分可能なとき, すなわち,

$$\iint_D \|p_u \times p_v\|\,dudv \in \mathbf{R}$$

となるとき, この値を p の面積という.

p の第一基本形式を

$$E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$$

とすると, Lagrange の公式より,

$$\begin{aligned} \|p_u \times p_v\|^2 &= \langle p_u, p_u \rangle \langle p_v, p_v \rangle - \langle p_u, p_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2 \end{aligned}$$

である．よって, p の面積要素は $\sqrt{EG-F^2}\,dudv$ とも表され, 特に $EG-F^2$ は常に正である．例えば, 例 4.1 において, 関数のグラフに対する面積要素は

$$\begin{aligned}\sqrt{EG-F^2}\,dudv &= \sqrt{(1+f_u^2)(1+f_v^2)-(f_uf_v)^2}\,dudv \\ &= \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\,dudv\end{aligned}$$

となる．

例 4.2 (柱面)　平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておき, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times \mathbf{R},$$

$$p(u,v) = (x(u), y(u), v) \quad ((u,v) \in D)$$

により定める．p を柱面という．特に, γ が円のときは円柱である．

　γ が正則であるとすると,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\end{aligned}$$

である．よって, p は正則である．また, p の単位法ベクトルは

$$\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{(\dot{y}, -\dot{x}, 0)}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

である．更に,

$$\langle p_u, p_u \rangle = \dot{x}^2+\dot{y}^2, \quad \langle p_u, p_v \rangle = 0, \quad \langle p_v, p_v \rangle = 1$$

だから, p の第一基本形式は

$$(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\,du^2 + 0 \cdot dudv + 1 \cdot dv^2$$

であるが, これを

$$(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\,du^2 + dv^2$$

と表す．したがって, p の面積要素は

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dudv$$

である．特に, γ が弧長により径数付けられているときは p の単位法ベクトル, 第一基本形式, 面積要素はそれぞれ

$$(\dot{y}, -\dot{x}, 0), \quad du^2+dv^2, \quad dudv$$

である．

問題 4

1. $a, b, c > 0$ とする. 楕円面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定め, p の第一基本形式を

$$E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2$$

とする. E, F, G を求めよ.

2. 正則平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. ただし, f は 0 とはならないとする. このとき, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. p を回転面という.

(1) p は正則であることを示せ.

(2) f が常に正であるとき, p の単位法ベクトルを求めよ.

(3) p の第一基本形式を求めよ.

(4) p の面積要素を求めよ.

(5) $0 < a < b$ とし,

$$f(t) = b + a \cos t, \quad g(t) = a \sin t \quad (t \in [0, 2\pi])$$

とする. このとき, p を輪環面, 円環面またはトーラスという. p の面積を求めよ.

(6) $a, b > 0$ とし,

$$f(t) = a \cosh \frac{t}{a}, \quad g(t) = t \quad (t \in [0, b])$$

とする. p の面積を求めよ. なお, t の範囲を $t \in \mathbf{R}$ としたときに得られる p を懸垂面またはカテノイドという.

問題 4 の解答

1. まず,

$$p_u = (a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, -c\sin u), \quad p_v = (-a\sin u\sin v, b\sin u\cos v, 0)$$

である. よって,

$$\begin{aligned} E &= \langle p_u, p_u\rangle \\ &= a^2\cos^2 u\cos^2 v + b^2\cos^2 u\sin^2 v + c^2\sin^2 u, \\ F &= \langle p_u, p_v\rangle \\ &= (b^2 - a^2)\cos u\sin u\cos v\sin v, \\ G &= \langle p_v, p_v\rangle \\ &= a^2\sin^2 u\sin^2 v + b^2\sin^2 u\cos^2 v \end{aligned}$$

である.

2. (1) $(u, v) \in D$ に対して,

$$x(u,v) = f(u)\cos v, \quad y(u,v) = f(u)\sin v, \quad z(u,v) = g(u)$$

とおくと,

$$x_u = f'(u)\cos v, \quad y_u = f'(u)\sin v, \quad z_u = g'(u),$$
$$x_v = -f(u)\sin v, \quad y_v = f(u)\cos v, \quad z_v = 0$$

である. 更に,

$$A = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$$

とおくと,

$$A = f(u)f'(u), \quad B = -f(u)g'(u)\cos v, \quad C = -f(u)g'(u)\sin v$$

である. γ は正則であり, f は 0 とはならないから,

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= (f(u))^2(f'(u))^2 + (f(u))^2(g'(u))^2\cos^2 v + (f(u))^2(g'(u))^2\sin^2 v \\ &= (f(u))^2\left\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\right\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

である. よって, A, B, C の内の少なくとも 1 つは 0 ではない. したがって, 任意の $(u, v) \in D$ に対して,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} p_u(u,v) \\ p_v(u,v) \end{pmatrix} = 2,$$

すなわち, p は正則である.

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} p_u \times p_v &= (B, C, A) \\ &= (-f(u)g'(u)\cos v, -f(u)g'(u)\sin v, f(u)f'(u)) \\ &= f(u)(-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u)) \end{aligned}$$

である. f は常に正だから, p の単位法ベクトルは

$$\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{(-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u))}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}$$

である.

(3) (1) の計算より,

$$\langle p_u, p_u \rangle = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \quad \langle p_u, p_v \rangle = 0, \quad \langle p_v, p_v \rangle = (f(u))^2$$

である. よって, p の第一基本形式は

$$\left\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\right\} du^2 + (f(u))^2\, dv^2$$

である.

(4) (3) より, p の面積要素は

$$|f(u)|\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}\, dudv$$

である.

(5) (4) より, p の面積は

$$\begin{aligned}
\iint_D |b + a\cos u|\sqrt{(-a\sin u)^2 + (a\cos u)^2}\, dudv &= \iint_D a(b + a\cos u)\, dudv \\
&= \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} a(b + \cos u)\, dv \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} (ab + a\cos u)\, du \\
&= 2\pi [abu + a\sin u]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi^2 ab
\end{aligned}$$

である.

(6) (4) より, p の面積は

$$\begin{aligned}
\iint_D \left|a\cosh\frac{u}{a}\right| \sqrt{\sinh^2\frac{u}{a} + 1^2}\, dudv &= \iint_D a\cosh^2\frac{u}{a}\, dudv \\
&= \int_0^b du \int_0^{2\pi} a\cosh^2\frac{u}{a}\, dv \\
&= 2\pi a \int_0^b \frac{1 + \cosh\dfrac{2u}{a}}{2}\, du \\
&= 2\pi a \left[\frac{1}{2}u + \frac{a}{4}\sinh\frac{2u}{a}\right]_0^b \\
&= \frac{\pi a}{2}\left(2b + a\sinh\frac{2b}{a}\right)
\end{aligned}$$

である.