

## §5. 第二基本形式

§4において扱ったように、曲面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

の第一基本形式を

$$I = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

とすると、 $E, F, G$ は $p$ の偏導関数を用いて、

$$E = \langle p_u, p_u \rangle, \quad F = \langle p_u, p_v \rangle, \quad G = \langle p_v, p_v \rangle$$

によりあたえられた。これに対して、第二基本形式は $p$ の2次の偏導関数と単位法ベクトルを用いて表される。

$\nu$ を $p$ の単位法ベクトルとし、 $D$ で定義された関数 $L, M, N$ を

$$L = \langle p_{uu}, \nu \rangle, \quad M = \langle p_{uv}, \nu \rangle, \quad N = \langle p_{vv}, \nu \rangle$$

により定める。このとき、

$$II = L du^2 + 2M dudv + N dv^2$$

とおき、これを $p$ の第二基本形式という。

**例 5.1** 関数のグラフを

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表しておく、

$$p_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \quad p_{uv} = (0, 0, f_{uv}), \quad p_{vv} = (0, 0, f_{vv})$$

である。また、問題 3-1 より、 $p$ の単位法ベクトルを $\nu$ とすると、

$$\nu = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}$$

である。よって、

$$\langle p_{uu}, \nu \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, \quad \langle p_{uv}, \nu \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, \quad \langle p_{vv}, \nu \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}$$

である。したがって、 $p$ の第二基本形式は

$$\frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} du^2 + \frac{2f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} dudv + \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} dv^2$$

である。

**例 5.2** 平面曲線

$$\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておき、柱面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times \mathbf{R},$$

$$p(u, v) = (x(u), y(u), v) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. このとき,

$$p_{uu} = (\ddot{x}, \ddot{y}, 0), \quad p_{uv} = 0, \quad p_{vv} = 0$$

である. また, 例 4.2 より,  $p$  の単位法ベクトルを  $\nu$  とすると,

$$\nu = \frac{(\dot{y}, -\dot{x}, 0)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

である. よって,

$$\langle p_{uu}, \nu \rangle = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \langle p_{uv}, \nu \rangle = 0, \quad \langle p_{vv}, \nu \rangle = 0$$

である. したがって,  $p$  の第二基本形式は

$$\frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} du^2$$

である.

第一基本形式は曲面上の曲線の長さを求める場合に現れたが, 第二基本形式はどのような意味をもつのであろうか. まず, 弧長により径数付けられた  $p$  上の曲線

$$\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(s) = p(u(s), v(s)) \quad (s \in I)$$

と表しておく.  $\gamma$  の 2 階微分  $\gamma''$  は  $\mathbf{R}^3$  に値をとる関数であるが, 接平面に値をとる関数と単位法ベクトル方向に値をとる関数の和で

$$\gamma'' = k_g + k_n$$

と一意的に表すことができる. ただし,  $k_g$  は接平面に値をとる関数,  $k_n$  は単位法ベクトル方向に値をとる関数である.  $k_g, k_n$  をそれぞれ  $\gamma$  の測地的曲率ベクトル, 法曲率ベクトルという. また,  $k_g$  が恒等的に 0 となるとき,  $\gamma$  を測地線という.

法曲率ベクトル  $k_n$  は単位法ベクトル  $\nu$  の方向に値をとるから, ある関数

$$\kappa_n : I \rightarrow \mathbf{R}$$

が存在し,

$$k_n(s) = \kappa_n(s)\nu(u(s), v(s)) \quad (s \in I)$$

と表される.  $\kappa_n$  を  $\gamma$  の法曲率という.  $(u(s), v(s))$  と  $\nu$  を合成して得られる写像も単に  $\nu$  と表すことにすると,

$$\begin{aligned} \langle \gamma'', \nu \rangle &= \langle k_g + k_n, \nu \rangle \\ &= \langle k_n, \nu \rangle \\ &= \kappa_n \end{aligned}$$

である. 一方,

$$\gamma' = p_u u' + p_v v',$$

$$\begin{aligned} \gamma'' &= p_{uu}(u')^2 + p_{uv}v'u' + p_u u'' + p_{vu}u'v' + p_{vv}(v')^2 + p_v v'' \\ &= p_{uu}(u')^2 + 2p_{uv}u'v' + p_{vv}(v')^2 + p_u u'' + p_v v'' \end{aligned}$$

である. よって,

$$\kappa_n = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2$$

となる. すなわち, 第二基本形式は曲面上の曲線の法曲率を求める場合に現れるのである.

次に,  $p$  の面積要素が  $\sqrt{EG - F^2} dudv$  と表されたことを思い出そう. 第二基本形式を用いて表される関数  $LN - M^2$  については次がなりたつ.

**定理 5.1** 曲面  $p$  は  $LN - M^2 > 0$  となる点で凸となり,  $LN - M^2 < 0$  となる点で鞍状となる.

**証明**  $(u_0, v_0) \in D$  を固定しておき, 関数

$$f : D \rightarrow \mathbf{R}$$

を

$$f(u, v) = \langle p(u, v), \nu(u_0, v_0) \rangle \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.  $f$  は  $p$  の  $\nu(u_0, v_0)$  方向の高さを表す. このとき,

$$f_u(u, v) = \langle p_u(u, v), \nu(u_0, v_0) \rangle$$

だから,

$$\begin{aligned} f_u(u_0, v_0) &= \langle p_u(u_0, v_0), \nu(u_0, v_0) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. 同様に,

$$f_v(u_0, v_0) = 0$$

である. よって,  $(u_0, v_0)$  は  $f$  の極値をあたえる点の候補となる.  $H_f$  を  $(u_0, v_0)$  における  $f$  の Hessian とすると,

$$H_f = f_{uu}(u_0, v_0)f_{vv}(u_0, v_0) - (f_{uv}(u_0, v_0))^2$$

である. ここで,

$$f_{uu}(u, v) = \langle p_{uu}(u, v), \nu(u_0, v_0) \rangle$$

だから,

$$\begin{aligned} f_{uu}(u_0, v_0) &= \langle p_{uu}(u_0, v_0), \nu(u_0, v_0) \rangle \\ &= L(u_0, v_0) \end{aligned}$$

である. 同様に,

$$f_{vv}(u_0, v_0) = N(u_0, v_0), \quad f_{uv}(u_0, v_0) = M(u_0, v_0)$$

である. したがって,

$$H_f = L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - (M(u_0, v_0))^2$$

だから,  $p$  は  $LN - M^2 > 0$  となる点で凸となり,  $LN - M^2 < 0$  となる点で鞍状となる.  $\square$

## 問題 5

## 1. 平面曲線

$$\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. ただし,  $f$  は常に正であるとする. このとき, 回転面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad ((u, v) \in D)$$

により定めると, 問題 4-2 (2) より,  $p$  の単位法ベクトルは

$$\frac{(-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u))}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}$$

となる.  $p$  の第二基本形式を求めよ.2.  $a > 0$  とする. 原点中心, 半径  $a$  の球面の一部

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定めると, 問題 3-2 (2) より,  $p$  の単位法ベクトルは

$$(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

となる.  $u_0 \in (0, \pi)$  を固定しておき, 弧長により径数付けられた  $p$  上の空間曲線

$$\gamma: (0, 2\pi a \sin u_0) \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(s) = \left( a \sin u_0 \cos \frac{s}{a \sin u_0}, a \sin u_0 \sin \frac{s}{a \sin u_0}, a \cos u_0 \right) \quad (s \in (0, 2\pi a \sin u_0))$$

により定める.

- (1)  $\gamma$  の法曲率を求めよ.
- (2)  $\gamma$  の法曲率ベクトルを求めよ.
- (3)  $\gamma$  の測地的曲率ベクトルを求めよ.
- (4)  $\gamma$  の測地的曲率ベクトルの長さを求めよ.
- (5)  $\gamma$  が測地線となるときの  $u_0$  を求めよ.

## 問題5の解答

1. まず,

$$\begin{cases} p_{uu} = (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, g''(u)), \\ p_{uv} = (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0), \\ p_{vv} = (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, 0) \end{cases}$$

である. よって,  $\nu$  を  $p$  の単位法ベクトルとすると,

$$\langle p_{uu}, \nu \rangle = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}, \quad \langle p_{uv}, \nu \rangle = 0, \quad \langle p_{vv}, \nu \rangle = \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}$$

である. したがって,  $p$  の第二基本形式は

$$\frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}} du^2 + \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}} dv^2$$

である.

2. (1) まず,

$$\gamma' = \left( -\sin \frac{s}{a \sin u_0}, \cos \frac{s}{a \sin u_0}, 0 \right)$$

だから,

$$\gamma'' = \left( -\frac{1}{a \sin u_0} \cos \frac{s}{a \sin u_0}, -\frac{1}{a \sin u_0} \sin \frac{s}{a \sin u_0}, 0 \right)$$

である. よって,  $\nu$  を  $p$  の単位法ベクトル,  $\kappa_n$  を  $\gamma$  の法曲率とすると,

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \langle \gamma'', \nu \rangle \\ &= \left( -\frac{1}{a \sin u_0} \cos \frac{s}{a \sin u_0} \right) \left( \sin u_0 \cos \frac{s}{a \sin u_0} \right) \\ &\quad + \left( -\frac{1}{a \sin u_0} \sin \frac{s}{a \sin u_0} \right) \left( \sin u_0 \sin \frac{s}{a \sin u_0} \right) + 0 \cdot \cos u_0 \\ &= -\frac{1}{a} \end{aligned}$$

である.

(2) (1) より,  $\gamma$  の法曲率ベクトルは

$$\kappa_n \nu = -\frac{1}{a} \left( \sin u_0 \cos \frac{s}{a \sin u_0}, \sin u_0 \sin \frac{s}{a \sin u_0}, \cos u_0 \right)$$

である.

(3) (2) より,  $\gamma$  の測地的曲率ベクトルは

$$\begin{aligned} \gamma'' - \kappa_n \nu &= \left( -\frac{1}{a \sin u_0} \cos \frac{s}{a \sin u_0}, -\frac{1}{a \sin u_0} \sin \frac{s}{a \sin u_0}, 0 \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{a} \sin u_0 \cos \frac{s}{a \sin u_0}, \frac{1}{a} \sin u_0 \sin \frac{s}{a \sin u_0}, \frac{1}{a} \cos u_0 \right) \\ &= -\frac{\cos u_0}{a} \left( \frac{\cos u_0}{\sin u_0} \cos \frac{s}{a \sin u_0}, \frac{\cos u_0}{\sin u_0} \sin \frac{s}{a \sin u_0}, -1 \right) \end{aligned}$$

である.

(4) (3) より,

$$\begin{aligned}\|\gamma'' - \kappa_n \nu\|^2 &= \frac{\cos^2 u_0}{a^2} \left( \frac{\cos^2 u_0}{\sin^2 u_0} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{\cos^2 u_0}{\sin^2 u_0}\end{aligned}$$

である. よって,  $\gamma$  の測地的曲率ベクトルの長さは

$$\begin{aligned}\|\gamma'' - \kappa_n \nu\| &= \frac{1}{a} \left| \frac{\cos u_0}{\sin u_0} \right| \\ &= \frac{|\cot u_0|}{a}\end{aligned}$$

である.

(5)  $\gamma$  が測地線となるのは測地的曲率ベクトルが恒等的に 0 となるときだから, (4) より,

$$\cot u_0 = 0$$

である.  $u_0 \in (0, \pi)$  だから, これを解くと,

$$u_0 = \frac{\pi}{2}$$

である.