§11. 曲面論の基本定理

ここでは, §9 において扱った等温座標系を用いて, Gauss-Weingarten の公式に対する積分可能条件を求め, 曲面論の基本定理を示そう. (u, v) を曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の等温座標系, ν を p の単位法ベクトル

$$E(du^2 + dv^2), \quad L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$$

をそれぞれ p の第一基本形式, 第二基本形式とする. このとき, §6 において扱った Gauss の公式および Weingarten の公式はそれぞれ

$$\begin{cases} p_{uu} = \dfrac{E_u}{2E}p_u - \dfrac{E_v}{2E}p_v + L\nu, \\ p_{uv} = \dfrac{E_v}{2E}p_u + \dfrac{E_u}{2E}p_v + M\nu, \\ p_{vu} = \dfrac{E_v}{2E}p_u + \dfrac{E_u}{2E}p_v + M\nu, \\ p_{vv} = -\dfrac{E_u}{2E}p_u + \dfrac{E_v}{2E}p_v + N\nu, \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu_u = -\dfrac{L}{E}p_u - \dfrac{M}{E}p_v, \\ \nu_v = -\dfrac{M}{E}p_u - \dfrac{N}{E}p_v \end{cases}$$

となる.

E は常に正であるから,

$$E = e^{2\sigma}$$

と表しておくと, 上の式は

$$\begin{cases} p_{uu} = \sigma_u p_u - \sigma_v p_v + L\nu, \\ p_{uv} = \sigma_v p_u + \sigma_u p_v + M\nu, \\ p_{vu} = \sigma_v p_u + \sigma_u p_v + M\nu, \\ p_{vv} = -\sigma_u p_u + \sigma_v p_v + N\nu, \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu_u = -e^{-2\sigma}Lp_u - e^{-2\sigma}Mp_v, \\ \nu_v = -e^{-2\sigma}Mp_u - e^{-2\sigma}Np_v \end{cases}$$

となる. 更に,

$$f = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ \nu \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \sigma_u & -\sigma_v & L \\ \sigma_v & \sigma_u & M \\ -e^{-2\sigma}L & -e^{-2\sigma}M & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sigma_v & \sigma_u & M \\ -\sigma_u & \sigma_v & N \\ -e^{-2\sigma}M & -e^{-2\sigma}N & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, 連立線形偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = Af, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = Bf \end{cases} \tag{$*$}$$

が得られる. これは問題 10-1 において現れた連立線形偏微分方程式の特別な場合である.

f は 3 次の正方行列に値をとる関数であるが, $(*)$ の積分可能条件は §10 において扱った場合と同様に考えることができる. ただし, A, B は f の左から掛けられていることに注意すると, $(*)$ の積分可能条件は

$$A_v - B_u + AB - BA = O \tag{$**$}$$

となる.

ここで,

$$A_v - B_u = \begin{pmatrix} \sigma_{uv} & -\sigma_{vv} & L_v \\ \sigma_{vv} & \sigma_{uv} & M_v \\ 2\sigma_v e^{-2\sigma}L - e^{-2\sigma}L_v & 2\sigma_v e^{-2\sigma}M - e^{-2\sigma}M_v & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_{vu} & \sigma_{uu} & M_u \\ -\sigma_{uu} & \sigma_{vu} & N_u \\ 2\sigma_u e^{-2\sigma}M - e^{-2\sigma}M_u & 2\sigma_u e^{-2\sigma}N - e^{-2\sigma}N_u & 0 \end{pmatrix}$$

である. また,

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} \sigma_u & -\sigma_v & L \\ \sigma_v & \sigma_u & M \\ -e^{-2\sigma}L & -e^{-2\sigma}M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_v & \sigma_u & M \\ -\sigma_u & \sigma_v & N \\ -e^{-2\sigma}M & -e^{-2\sigma}N & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \sigma_v & \sigma_u & M \\ -\sigma_u & \sigma_v & N \\ -e^{-2\sigma}M & -e^{-2\sigma}N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_u & -\sigma_v & L \\ \sigma_v & \sigma_u & M \\ -e^{-2\sigma}L & -e^{-2\sigma}M & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\sigma_u\sigma_v - e^{-2\sigma}LM & \sigma_u^2 - \sigma_v^2 - e^{-2\sigma}LN & \sigma_u M - \sigma_v N \\ \sigma_v^2 - \sigma_u^2 - e^{-2\sigma}M^2 & 2\sigma_u\sigma_v - e^{-2\sigma}MN & \sigma_v M + \sigma_u N \\ -\sigma_v e^{-2\sigma}L + \sigma_u e^{-2\sigma}M & -\sigma_u e^{-2\sigma}L - \sigma_v e^{-2\sigma}M & -e^{-2\sigma}LM - e^{-2\sigma}MN \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 2\sigma_u\sigma_v - e^{-2\sigma}LM & -\sigma_v^2 + \sigma_u^2 - e^{-2\sigma}M^2 & \sigma_v L + \sigma_u M \\ -\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - e^{-2\sigma}LN & 2\sigma_u\sigma_v - e^{-2\sigma}MN & -\sigma_u L + \sigma_v M \\ -\sigma_u e^{-2\sigma}M - \sigma_v e^{-2\sigma}N & \sigma_v e^{-2\sigma}M - \sigma_u e^{-2\sigma}N & -e^{-2\sigma}LM - e^{-2\sigma}MN \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. よって, $(**)$ は

$$\begin{cases} \sigma_{uu} + \sigma_{vv} + e^{-2\sigma}(LN - M^2) = 0, \\ L_v - M_u = \sigma_v(L+N), \\ N_u - M_v = \sigma_u(L+N) \end{cases}$$

と同値である. この式の第 1 式を Gauss の方程式, 第 2 式および第 3 式を Codazzi の方程式という.

定理 11.1 (曲面論の基本定理) σ, L, M, N を単連結な領域 D で定義された関数とする. 第一基本形式, 第二基本形式をそれぞれ

$$e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$$

とする曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

が回転と平行移動の合成を除いて一意的に存在するための必要十分条件は σ, L, M, N が Gauss-Codazzi の方程式をみたすことである.

証明 σ, L, M, N が Gauss-Codazzi の方程式をみたすとき, p が存在することのみ示す.

$(u_0, v_0) \in D$ を固定しておくと, 初期条件

$$f(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} e^{\sigma(u_0,v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\sigma(u_0,v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をみたす $(*)$ の解が一意的に存在する. このとき,

$$\begin{aligned}(f^t f)_u &= f_u{}^t f + f^t f_u \\ &= A f^t f + f^t f^t A\end{aligned}$$

である. 一方,

$$P = \begin{pmatrix} e^{2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}AP + P^t A &= \begin{pmatrix} \sigma_u & -\sigma_v & L \\ \sigma_v & \sigma_u & M \\ -e^{-2\sigma}L & -e^{-2\sigma}M & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} e^{2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}L \\ -\sigma_v & \sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ L & M & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_u e^{2\sigma} & -\sigma_v e^{2\sigma} & L \\ \sigma_v e^{2\sigma} & \sigma_u e^{2\sigma} & M \\ -L & -M & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_u e^{2\sigma} & \sigma_v e^{2\sigma} & -L \\ -\sigma_v e^{2\sigma} & \sigma_u e^{2\sigma} & -M \\ L & M & 0 \end{pmatrix} \\ &= P_u\end{aligned}$$

である. 同様に,

$$(f^t f)_v = B f^t f + f^t f^t B, \quad P_v = BP + P^t B$$

である. 更に,

$$(f^t f)(u_0, v_0) = P(u_0, v_0)$$

だから, 解の一意性より,

$$f^t f = P$$

である.

ここで, 連立偏微分方程式

$$\begin{cases} p_u = (1, 0, 0) f, \\ p_v = (0, 1, 0) f \end{cases}$$

を考えると,

$$\begin{aligned}p_{uv} &= (1, 0, 0) f_v \\ &= (1, 0, 0) B f \\ &= (\sigma_v, \sigma_u, M) f \\ &= (0, 1, 0) A f \\ &= (0, 1, 0) f_u \\ &= p_{vu}\end{aligned}$$

である. よって, 上の方程式の解 p が存在し, p が求める曲面となることが分かる. □

問題 11

1. 曲面

$$p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

を

$$p(u, v) = (-u^3 + 3uv^2 + 3u, v^3 - 3u^2 v - 3v, 3u^2 - 3v^2) \quad ((u, v) \in \mathbf{R}^2)$$

により定めると, p は正則となることが分かる.

(1) p の単位法ベクトルを求めよ.

(2) p の第一基本形式を求めよ.

(3) p の第二基本形式を求めよ. (2), (3) より, p は極小であることが分かる. p を Enneper の極小曲面という.

(4) Gauss の方程式がなりたつことを確かめよ.

問題 11 の解答

1. (1) $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ に対して,

$$x(u,v) = -u^3 + 3uv^2 + 3u, \quad y(u,v) = v^3 - 3u^2v - 3v, \quad z(u,v) = 3u^2 - 3v^2$$

とおくと,

$$x_u = -3u^2 + 3v^2 + 3, \quad y_u = -6uv, \quad z_u = 6u,$$
$$x_v = 6uv, \quad y_v = 3v^2 - 3u^2 - 3, \quad z_v = -6v$$

である. 更に,

$$A = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} A &= 3\{(-u^2+v^2)+1\} \cdot 3\{(-u^2+v^2)-1\} + 36u^2v^2 \\ &= 9(u^4 - 2u^2v^2 + v^4 - 1 + 4u^2v^2) \\ &= 9(u^2+v^2+1)(u^2+v^2-1), \\ B &= 36uv^2 - 18u(v^2-u^2-1) \\ &= 18u(u^2+v^2+1), \\ C &= 36u^2v + 18v(-u^2+v^2+1) \\ &= 18v(u^2+v^2+1) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} p_u \times p_v &= (B, C, A) \\ &= (18u(u^2+v^2+1), 18v(u^2+v^2+1), 9(u^2+v^2+1)(u^2+v^2-1)) \\ &= 9(u^2+v^2+1)(2u, 2v, u^2+v^2-1) \end{aligned}$$

である. したがって, p の単位法ベクトルは

$$\begin{aligned} \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} &= \frac{(2u, 2v, u^2+v^2-1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+(u^2+v^2-1)^2}} \\ &= \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1) \end{aligned}$$

である.

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} \langle p_u, p_u \rangle &= 9(-u^2+v^2+1)^2 + 36u^2v^2 + 36u^2 \\ &= 9(u^4 + v^4 + 1 - 2u^2v^2 - 2u^2 + 2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2) \\ &= 9(u^2+v^2+1)^2, \\ \langle p_u, p_v \rangle &= -18u^3v + 18uv^3 + 18uv - 18uv^3 + 18u^3v + 18uv - 36uv \\ &= 0, \\ \langle p_v, p_v \rangle &= 36u^2v^2 + 9(v^2-u^2-1)^2 + 36v^2 \\ &= 9(4u^2v^2 + v^4 + u^4 + 1 - 2u^2v^2 - 2v^2 + 2u^2 + 4v^2) \\ &= 9(u^2+v^2+1)^2 \end{aligned}$$

である．よって, p の第一基本形式は

$$9(u^2+v^2+1)^2(du^2+dv^2)$$

である．

(3) (1) の計算より,

$$p_{uu}=(-6u,-6v,6),\quad p_{uv}=(6v,-6u,0),\quad p_{vv}=(6u,6v,-6)$$

である．よって, ν を p の単位法ベクトルとすると, (1) より,

$$\begin{aligned}\langle p_{uu},\nu\rangle &= \frac{1}{u^2+v^2+1}(-12u^2-12v^2+6u^2+6v^2-6)\\ &= -6,\\ \langle p_{uv},\nu\rangle &= 0,\\ \langle p_{vv},\nu\rangle &= \frac{1}{u^2+v^2+1}(12u^2+12v^2-6u^2-6v^2+6)\\ &= 6\end{aligned}$$

である．したがって, p の第二基本形式は

$$-6\,du^2+6\,dv^2$$

である．

(4) (2) より, (u,v) は等温座標系であることに注意する．ここで,

$$9(u^2+v^2+1)^2=e^{2\sigma}$$

とすると,

$$\sigma=\log\{3(u^2+v^2+1)\}$$

である．よって,

$$\sigma_u=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\quad \sigma_{uu}=2\frac{-u^2+v^2+1}{(u^2+v^2+1)^2}$$

となる．同様に,

$$\sigma_{vv}=2\frac{u^2-v^2+1}{(u^2+v^2+1)^2}$$

である．更に,

$$L=-6,\quad M=0,\quad N=6$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\sigma_{uu}+\sigma_{vv}+e^{-2\sigma}(LN-M^2) &= \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}+\frac{1}{9(u^2+v^2+1)^2}(-6\cdot 6-0^2)\\ &= 0\end{aligned}$$

である．したがって, Gauss の方程式がなりたつ．