

## §3. 写像

写像は集合と同様に現代数学において必要不可欠な概念である.

**定義 3.1**  $X, Y$  を空でない集合とし,  $X$  の任意の元に対して,  $Y$  のある元を対応させる規則  $f$  があたえられているとする. このことを

$$f: X \rightarrow Y$$

と表し,  $f$  を  $X$  から  $Y$  への写像または  $X$  で定義された  $Y$  への写像,  $X$  を  $f$  の定義域または始域,  $Y$  を  $f$  の値域または終域という.  $Y \subset \mathbf{R}, \mathbf{C}$  のときは  $f$  をそれぞれ実数値関数, 複素数値関数ともいう. また, 実数値関数, 複素数値関数を単に関数ともいう.

写像  $f$  によって  $x \in X$  に対して  $y \in Y$  が対応するとき,  $y = f(x)$  と表す. このとき,  $y$  を  $f$  による  $x$  の像,  $x$  を  $f$  による  $y$  の原像または逆像という.

**注意 3.1** 写像によって  $x$  に対して  $y$  が対応することを  $x \mapsto y$  とも表す.

以下では, 簡単のため, 写像に対する定義域, 値域はともに空ではない場合を考える.

**例 3.1** 問題 1.6 では,  $\mathbf{R}$  の部分集合の例として, 区間を定義した. いわゆる 1 変数の微分積分では, 区間で定義された実数値関数を考える.  $I$  を区間とすると,  $I$  を定義域,  $\mathbf{R}$  を値域とする実数値関数  $f$  は  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  と表すことができる. 例えば,  $a \in \mathbf{R}$  を定数とし,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = a \quad (x \in I)$$

により定めると,  $f$  は任意の  $x \in I$  に対して  $a$  を対応させる定数関数である. また,  $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  を 0 でない定数,  $b \in \mathbf{R}$  を定数とし,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = ax + b \quad (x \in I)$$

により定めると,  $f$  は 1 次関数である. 更に,  $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  を 0 でない定数,  $b, c \in \mathbf{R}$  を定数とし,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in I)$$

により定めると,  $f$  は 2 次関数である.

**例 3.2 (定値写像)**  $X, Y$  を空でない集合とし,  $y_0 \in Y$  を 1 つ選んで固定しておく. このとき, 写像  $f: X \rightarrow Y$  を

$$f(x) = y_0 \quad (x \in X)$$

により定める.  $f$  を定値写像という. 例 3.1 で述べた定数関数は定値写像の例でもある.

**例 3.3 (包含写像, 恒等写像)**  $X, Y$  を空でない集合とし,  $X \subset Y$  とする. このとき, 写像  $\iota: X \rightarrow Y$  を

$$\iota(x) = x \quad (x \in X)$$

により定めることができる.  $\iota$  を包含写像という. 特に,  $X = Y$  のときは  $\iota$  を  $\text{id}_X$  または  $1_X$  と表し,  $X$  上の恒等写像という.

**例 3.4 (制限写像)**  $X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とし,  $A \subset X, A \neq \emptyset$  とする. このとき, 写像  $f|_A: A \rightarrow Y$  を

$$f|_A(x) = f(x) \quad (x \in A)$$

により定めることができる.  $f|_A$  を  $f$  の  $A$  への制限という.

$f, g$  を写像とする.  $f$  と  $g$  の定義域が等しく,  $f$  と  $g$  の値域も等しく, 更に,  $f, g$  の定義域の任意の点  $x$  に対して,  $f(x) = g(x)$  がなりたつとき,  $f = g$  と表し,  $f$  と  $g$  は等しいという. また,  $f$  と  $g$  が等しくないときは  $f \neq g$  と表す.

写像に対してグラフという集合を対応させることができる. まず, グラフを定義するための準備として, 2つの集合の直積について述べよう.  $X, Y$  を集合とする. このとき,  $x \in X, y \in Y$  の組  $(x, y)$  全体からなる集合を  $X \times Y$  と表し,  $X$  と  $Y$  の直積という. すなわち,

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

である. ただし, 上の組は順序も込みで考えたもので,  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$  に対して,  $(x, y) = (x', y')$  となるのは  $x = x'$  かつ  $y = y'$  のときであるとする.

**例 3.5** 集合  $X, Y$  を  $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}$  により定めると,

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}, \quad X \times X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\},$$

$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\},$$

$$Y \times Y = \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

である. 例えば,  $X \times X$  の元  $(1, 2)$  と  $(2, 1)$  は異なるものであることに注意しよう. なお,  $X \times X$  や  $Y \times Y$  はそれぞれ  $X^2, Y^2$  と表す.

それでは, 写像のグラフを定義しよう.

**定義 3.2**  $X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とする. このとき,  $G(f) \subset X \times Y$  を

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

により定め, これを  $f$  のグラフという.

**例 3.6** 例 3.1 で述べた, 区間  $I$  で定義された実数値関数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  のグラフは

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$$

である.  $\mathbf{R}$  と  $\mathbf{R}$  の直積  $\mathbf{R}^2$  を平面とみなすと, 平面の部分集合であるグラフ  $G(f)$  を考えることによって, 関数  $f$  を視覚的に捉えることができる.

写像の定義域や値域の部分集合に対して, それぞれ次のような値域, 定義域の部分集合を考えることができる.

**定義 3.3**  $X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とする.

$A \subset X$  とする. このとき,  $f(A) \subset Y$  を

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

により定め, これを  $f$  による  $A$  の像という. ただし,  $f(\emptyset) = \emptyset$  とする.

$B \subset Y$  とする. このとき,  $f^{-1}(B) \subset X$  を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

により定め, これを  $f$  による  $B$  の原像または逆像という. ただし,  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  とする.

**注意 3.2** 定義 3.3 において,  $f(X)$  を  $f$  の値域ということもある. この場合,  $Y$  は終域という方がよい.

**例 3.7** 集合  $X, Y$  を  $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6\}$  により定め、写像  $f: X \rightarrow Y$  を  $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 5$  により定める。このとき、

$$f(\{1\}) = \{4\}, \quad f(\{1, 2\}) = \{4, 5\}, \quad f^{-1}(\{4\}) = \{1\}, \quad f^{-1}(\{4, 5\}) = X$$

である。

像および逆像に関して、次がなりたつ。

**定理 3.1**  $X, Y$  を空でない集合、 $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とし、 $A, A_1, A_2 \subset X, B, B_1, B_2 \subset Y$  とする。このとき、次の (1)~(10) がなりたつ。

- (1)  $A_1 \subset A_2$  ならば、 $f(A_1) \subset f(A_2)$ 。
- (2)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ 。
- (3)  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ 。
- (4)  $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$ 。
- (5)  $B_1 \subset B_2$  ならば、 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ 。
- (6)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ 。
- (7)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ 。
- (8)  $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ 。
- (9)  $f^{-1}(f(A)) \supset A$ 。
- (10)  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ 。

**証明** (1), (2), (5), (6) のみ示す。

(1):  $y \in f(A_1)$  とする。このとき、像の定義より、ある  $x \in A_1$  が存在し、 $y = f(x)$  である。ここで、 $x \in A_1$  および  $A_1 \subset A_2$  より、 $x \in A_2$  である。よって、像の定義より、 $f(x) \in f(A_2)$ 、すなわち、 $y \in f(A_2)$  である。したがって、 $y \in f(A_1)$  ならば  $y \in f(A_2)$ 、すなわち、 $f(A_1) \subset f(A_2)$  である。

(2): 左辺を変形すると、

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2) &= \{y \in Y \mid \text{ある } x \in A_1 \cup A_2 \text{ が存在し, } y = f(x)\} \\ &= \left\{ y \in Y \mid \begin{array}{l} \text{ある } x_1 \in A_1 \text{ が存在し } y = f(x_1), \text{ または,} \\ \text{ある } x_2 \in A_2 \text{ が存在し } y = f(x_2) \end{array} \right\} \\ &= \{y \in Y \mid y \in f(A_1) \text{ または } y \in f(A_2)\} \\ &= f(A_1) \cup f(A_2) \end{aligned}$$

である。よって、(2) がなりたつ。

(5):  $x \in f^{-1}(B_1)$  とする。このとき、逆像の定義より、 $f(x) \in B_1$  である。ここで、 $B_1 \subset B_2$  より、 $f(x) \in B_2$  である。よって、逆像の定義より、 $x \in f^{-1}(B_2)$  である。したがって、 $x \in f^{-1}(B_1)$  ならば  $x \in f^{-1}(B_2)$ 、すなわち、 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$  である。

(6): 左辺を変形すると、

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= \{x \in X \mid f(x) \in B_1 \cup B_2\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in B_1 \text{ または } f(x) \in B_2\} \\ &= \{x \in X \mid x \in f^{-1}(B_1) \text{ または } x \in f^{-1}(B_2)\} \\ &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

である。よって、(6) がなりたつ。 □

## 問題 3

1. 関数  $f_1, f_2, f_3, f_4$  を

$$f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_1(x) = x \quad (x \in \mathbf{R}), \quad f_2 : \{0, 1\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_2(x) = x \quad (x \in \{0, 1\}),$$

$$f_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_3(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R}), \quad f_4 : \{0, 1\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_4(x) = x^2 \quad (x \in \{0, 1\})$$

により定める.

(1)  $f_1, f_2, f_3, f_4$  の中で,  $f_1$  と等しいものが存在するかどうかを調べよ.

(2)  $f_1, f_2, f_3, f_4$  の中で,  $f_2$  と等しいものが存在するかどうかを調べよ.

2. 集合  $X, Y$  を  $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6\}$  により定め, 写像  $f : X \rightarrow Y$  を  $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 5$  により定める. 次の集合を外延的記法により表せ.

(1)  $f$  のグラフ.

(2)  $f(\{2, 3\}), f(X)$ .

(3)  $f^{-1}(\{5\}), f^{-1}(\{6\}), f^{-1}(\{4, 6\}), f^{-1}(Y)$ .

3. 集合  $X, Y$  を  $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4\}$  により定め, 写像  $f : X \rightarrow Y$  を  $f(1) = 3, f(2) = 3$  により定める. 次の集合を外延的記法により表せ.

(1)  $f(\{1\} \cap \{2\})$  および  $f(\{1\}) \cap f(\{2\})$ . 特に, 定理 3.1 (3) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.

(2)  $f(\{1\} \setminus \{2\})$  および  $f(\{1\}) \setminus f(\{2\})$ . 特に, 定理 3.1 (4) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.

(3)  $f^{-1}(f(\{1\}))$ . 特に, 定理 3.1 (9) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.

(4)  $f(f^{-1}(\{3, 4\}))$ . 特に, 定理 3.1 (10) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.

## 問題3の解答

1. (1) まず,  $f_1 = f_1$  である.

次に,  $f_1$  の定義域および値域はともに  $\mathbf{R}$  であり,  $f_2, f_3, f_4$  の中で,  $f_1$  と定義域および値域がそれぞれ等しいものは  $f_3$  である. ここで,

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

だから,  $f_1\left(\frac{1}{2}\right) \neq f_3\left(\frac{1}{2}\right)$  である. よって,  $f_1 \neq f_3$  である.

したがって,  $f_1, f_2, f_3, f_4$  の中で,  $f_1$  と等しいものは  $f_1$  のみである.

(2) まず,  $f_2 = f_2$  である.

次に,  $f_2$  の定義域および値域はそれぞれ  $\{0, 1\}, \mathbf{R}$  であり,  $f_1, f_3, f_4$  の中で,  $f_2$  と定義域および値域がそれぞれ等しいものは  $f_4$  である. ここで,

$$f_2(0) = f_4(0) = 0, \quad f_2(1) = f_4(1) = 1$$

だから,  $f_2 = f_4$  である.

よって,  $f_1, f_2, f_3, f_4$  の中で,  $f_2$  と等しいものは  $f_2$  と  $f_4$  である.

2. (1)  $f$  およびグラフの定義より, 求めるグラフは

$$\begin{aligned} G(f) &= \{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3))\} \\ &= \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\} \end{aligned}$$

である.

(2) 像の定義より,

$$\begin{aligned} f(\{2, 3\}) &= \{f(2), f(3)\} \\ &= \{5, 5\} \\ &= \{5\}, \\ f(X) &= f(\{1, 2, 3\}) \\ &= \{f(1), f(2), f(3)\} \\ &= \{4, 5, 5\} \\ &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

である.

(3)  $f(x) \in \{5\}$  となる  $x \in X$  を求めると,  $x = 2, 3$  である. よって, 逆像の定義より,

$$f^{-1}(\{5\}) = \{2, 3\}$$

である.

$f(x) \in \{6\}$  となる  $x \in X$  は存在しない. よって, 逆像の定義より,

$$f^{-1}(\{6\}) = \{ \}$$

である.

$f(x) \in \{4, 6\}$  となる  $x \in X$  を求めると,  $x = 1$  である. よって, 逆像の定義より,

$$f^{-1}(\{4, 6\}) = \{1\}$$

である.

$f$  は  $X$  から  $Y$  への写像だから, 任意の  $x \in X$  に対して,  $f(x) \in Y$  である. よって, 逆像の定義より,

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= X \\ &= \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

である.

3. (1) 共通部分および像の定義より,

$$\begin{aligned} f(\{1\} \cap \{2\}) &= f(\{ \}) \\ &= \{ \} \end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned} f(\{1\}) \cap f(\{2\}) &= \{3\} \cap \{3\} \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

である.

(2) 差および像の定義より,

$$\begin{aligned} f(\{1\} \setminus \{2\}) &= f(\{1\}) \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned} f(\{1\}) \setminus f(\{2\}) &= \{3\} \setminus \{3\} \\ &= \{ \} \end{aligned}$$

である.

(3) 像および逆像の定義より,

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\{1\})) &= f^{-1}(\{3\}) \\ &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

である.

(4) 像および逆像の定義より,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\{3, 4\})) &= f(\{1, 2\}) \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

である.