

## §5. 直交行列

直交行列については線形代数でも扱うが、後でもしばしば現れることになるため、ここで改めて述べておこう。まず、直交行列の定義から始める。

**定義 5.1**  $A$  を実正方行列とする。  $A$  が等式

$$A^t A = {}^t A A = E$$

をみたすとき、  $A$  を直交行列という。ただし、  $E$  は  $A$  と同じ型の単位行列である。

**注意 5.1** 定義 5.1 において、直交行列は  $A^t A = E$  または  ${}^t A A = E$  の何れか一方をみたす  $A$  であると定めてもよいことが分かる。また、  ${}^t({}^t A) = A$  だから、  $A$  が直交行列ならば、  ${}^t A$  も直交行列である。更に、  $A$  が直交行列ならば、  $A$  は正則であり、  $A^{-1} = {}^t A$  である。

**例 5.1** 単位行列  $E$  は実正方行列であり、

$$\begin{aligned} E^t E &= {}^t E \\ &= E, \end{aligned}$$

すなわち、  $E^t E = E$  である。よって、  $E$  は直交行列である。

$n$  次の直交行列全体の集合を  $O(n)$  と表す。1次および2次の直交行列は次のように具体的に求めることができる。

**例 5.2**  $x$  についての方程式

$$x^2 = 1$$

を解くと、  $x = \pm 1$  である。よって、

$$O(1) = \{(1), (-1)\} = \{\pm 1\}$$

である。

**例 5.3**  $A \in O(2)$  とし、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

と表しておく。このとき、直交行列の定義より、  ${}^t A A = E$ 、すなわち、

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。左辺を計算し、両辺の各成分を比較すると、

$$a^2 + c^2 = 1, \quad ab + cd = 0, \quad b^2 + d^2 = 1 \quad (*)$$

である。  $(*)$  の第1式と第3式より、ある  $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$  が存在し、

$$a = \cos \theta, \quad c = \sin \theta, \quad b = \sin \varphi, \quad d = \cos \varphi$$

と表すことができる。更に、  $(*)$  の第2式と加法定理より、

$$\sin(\theta + \varphi) = 0$$

である. ここで,  $0 \leq \theta + \varphi < 4\pi$  だから,

$$\theta + \varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$$

である. よって,

$$(\sin \varphi, \cos \varphi) = \begin{cases} (-\sin \theta, \cos \theta) & (\theta + \varphi = 0, 2\pi), \\ (\sin \theta, -\cos \theta) & (\theta + \varphi = \pi, 3\pi) \end{cases}$$

だから,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \mp \sin \theta \\ \sin \theta & \pm \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

である. したがって,

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

である.

直交行列に関する基本的な事実を幾つか挙げておこう.

**定理 5.1**  $A, B \in O(n)$  ならば,  $AB \in O(n)$  である.

**証明** 直交行列の定義より,

$$\begin{aligned} {}^t(AB)(AB) &= {}^tB {}^tAAB \\ &= {}^tBEB \\ &= {}^tBB \\ &= E, \end{aligned}$$

すなわち,

$${}^t(AB)(AB) = E$$

である. よって,  $AB \in O(n)$  である. □

**定理 5.2** 直交行列の行列式は 1 または  $-1$  である.

**証明**  $A$  を直交行列とすると, 直交行列の定義と行列式の性質より,

$$\begin{aligned} 1 &= |E| \\ &= |A {}^tA| \\ &= |A| |{}^tA| \\ &= |A|^2, \end{aligned}$$

すなわち,  $|A|^2 = 1$  である. よって,  $|A| = \pm 1$ , すなわち, 直交行列の行列式は 1 または  $-1$  である. □

行列式が 1 の直交行列を特殊直交行列ともいう. また, 行列式が 1 の  $n$  次直交行列全体の集合を  $SO(n)$  と表す. このとき, 次がなりたつ.

**定理 5.3**  $A, B \in SO(n)$  ならば,  $AB \in SO(n)$  である.

**証明** まず, 定理 5.1 より,  $AB \in O(n)$  である. ここで, 行列式の性質より,

$$\begin{aligned} |AB| &= |A||B| \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

すなわち,  $|AB| = 1$  である. よって,  $AB \in SO(n)$  である.  $\square$

以下では, 線形代数の習慣に従い, 実数を成分とする  $n$  次の列ベクトル全体からなる数ベクトル空間を考え, これを  $\mathbf{R}^n$  と表す. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

である. 更に,  $\mathbf{R}^n$  の標準内積を考え, これを  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と表す. すなわち,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

に対して,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = {}^t x y$$

である. 標準内積を考えた内積空間  $\mathbf{R}^n$  を Euclid 空間ともいう. 更に, 標準内積により定まるノルムを  $\| \cdot \|$  と表す. すなわち,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

である. このとき, 次がなりたつことが分かる.

**定理 5.4**  $A$  を  $n$  次実行列とすると, 次の (1)~(4) は互いに同値である.

- (1)  $A \in O(n)$  である.
- (2) 任意の  $x, y \in \mathbf{R}^n$  に対して,  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$  である.
- (3) 任意の  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して,  $\|Ax\| = \|x\|$  である.
- (4)  $A$  を  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  と列ベクトルに分割しておくと,  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の正規直交基底となる.

**例 5.4**  $\mathbf{R}^2$  の正規直交基底はある  $\theta \in [0, 2\pi)$  を用いて,

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\theta \pm \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \right\}$$

と表すことができる. よって, 定理 5.4 を用いることにより, 例 5.3 の結果を導くことができる.

## 問題 5

1. 行列式が  $1, -1$  の奇数次の直交行列はそれぞれ  $1, -1$  を固有値にもつことを示せ.
2.  $A \in O(3)$  とする. このとき, ある  $P \in O(3)$  および  $\theta \in [0, 2\pi)$  が存在し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ. なお, 必要ならば  $P$  の列の何れかを  $-1$  倍することにより,  $P \in SO(3)$  とすることができる.

3.  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を内積空間,  $\| \cdot \|$  を  $V$  のノルムとし,  $x, y \in V$  とする.

(1) 等式

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

がなりたつことを示せ.

(2) 等式

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

がなりたつことを示せ. この事実を中線定理という.

## 問題5の解答

1.  $m \in \mathbf{N}$ ,  $A \in O(2m-1)$ ,  $|A| = \varepsilon$  とする. ただし,  $\varepsilon = \pm 1$  である. このとき, 行列式の性質と直交行列の定義より,

$$\begin{aligned}
 |\varepsilon E - A| &= \varepsilon^2 |\varepsilon E - A| \\
 &= \varepsilon |A| |\varepsilon E - A| \\
 &= \varepsilon |{}^t A| |\varepsilon E - A| \\
 &= \varepsilon |{}^t A(\varepsilon E - A)| \\
 &= \varepsilon |\varepsilon {}^t A - E| \\
 &= \varepsilon |\varepsilon A - E| \\
 &= \varepsilon (-\varepsilon)^{2m-1} |\varepsilon E - A| \\
 &= -|\varepsilon E - A|,
 \end{aligned}$$

すなわち,

$$|\varepsilon E - A| = -|\varepsilon E - A|$$

である. よって,  $|\varepsilon E - A| = 0$  となり,  $A$  は  $\varepsilon$  を固有値にもつ. したがって, 行列式が  $1, -1$  の奇数次の直交行列はそれぞれ  $1, -1$  を固有値にもつ.

2.  $|A| = \varepsilon$  とする. ただし,  $\varepsilon = \pm 1$  である. このとき, 問題5.1より, 固有値  $\varepsilon$  に対する  $A$  の固有ベクトルが存在する. すなわち, ある  $p_1 \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  が存在し,

$$Ap_1 = \varepsilon p_1$$

となる. ここで,  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{R}^3$  を  $\{p_1, p_2, p_3\}$  が  $\mathbf{R}^3$  の正規直交基底となるように選んでおく.  $P = (p_1, p_2, p_3)$  とおくと, 定理5.4より,  $P \in O(3)$  である. このとき,

$$P^{-1} = {}^t P \in O(3)$$

である. また,  $i = 1, 2, 3$  とすると, 定理5.4より,

$$\begin{aligned}
 {}^t p_1 A p_i &= {}^t (\varepsilon A p_1) A p_i \\
 &= \varepsilon \langle A p_1, A p_i \rangle \\
 &= \varepsilon \langle p_1, p_i \rangle \\
 &= \varepsilon \delta_{1i}, \\
 {}^t p_i A p_1 &= {}^t p_i (\varepsilon p_1) \\
 &= \varepsilon \langle p_i, p_1 \rangle \\
 &= \varepsilon \delta_{i1}
 \end{aligned}$$

である. ただし,  $\delta_{ij}$  は Kronecker の  $\delta$  である. よって,

$$\begin{aligned}
 P^{-1} A P &= {}^t P A P \\
 &= \begin{pmatrix} {}^t p_1 \\ {}^t p_2 \\ {}^t p_3 \end{pmatrix} A(p_1, p_2, p_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} {}^t p_1 \\ {}^t p_2 \\ {}^t p_3 \end{pmatrix} (Ap_1, Ap_2, Ap_3) \\
&= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & & B \\ 0 & & \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

すなわち,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & & B \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

となる. ただし,  $B$  は 2 次行列である. ここで,  $|P| = \pm 1$ ,  $|A| = \varepsilon$  だから, 定理 5.1 および行列式の性質より,  $B \in \text{SO}(2)$  となる. したがって, 例 5.3 より, ある  $\theta \in [0, 2\pi)$  が存在し,

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となり, 題意がなりたつ.

3. (1) ノルムの定義および内積の性質より,

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{1}{2} \langle x+y, x+y \rangle - \frac{1}{2} \langle x, x \rangle - \frac{1}{2} \langle y, y \rangle \\
&= \frac{1}{2} \{ \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \} - \frac{1}{2} \langle x, x \rangle - \frac{1}{2} \langle y, y \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle x, y \rangle + \frac{1}{2} \langle y, x \rangle \\
&= \text{左辺}
\end{aligned}$$

である. よって, 等式

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad (*)$$

がなりたつ.

(2) (\*) において,  $y$  を  $-y$  に置き換えると, 内積およびノルムの性質より

$$-\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad (**)$$

である. (\*) + (\*\*) より,

$$0 = \frac{1}{2} \|x+y\|^2 + \frac{1}{2} \|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

である. これを整理すると, 中線定理が得られる.