§12. 2 次超曲面の標準形

ここでは, 2 次超曲面

$$
{}^t x A x + 2{}^t b x + c = 0 \tag{1}
$$

を $\mathbf{R}^n$ の等長変換を用いて, 標準形という理解しやすい形に変形することを考えよう．ただし, $A \in \mathrm{Sym}(n)$, $A \neq O$, $b, x \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ である．なお, A が正則な場合は問題 11.1 も参考にするとよい．

まず, 定理 11.1 の証明を思い出そう．$f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ に対して, $P \in \mathrm{O}(n)$ および $q \in \mathbf{R}^n$ を用いて, f^{-1} を

$$
f^{-1}(y) = Py + q \quad (y \in \mathbf{R}^n)
$$

と表しておく．このとき, $x = f^{-1}(y)$ を (1) に代入すると, 2 次超曲面

$$
{}^t y({}^t PAP)y + 2{}^t(Aq + b)Py + {}^t qAq + 2{}^t bq + c = 0 \tag{2}
$$

が得られるのであった．ここで, $A \in \mathrm{Sym}(n)$ だから, A の固有方程式の解はすべて実数であり, A の固有値である．また, $r = \mathrm{rank}\, A$ とおくと, $A \neq O$ だから, $r = 1, 2, \ldots, n$ である．特に, $r = n$ となるのは A が正則なときである．そこで, A の固有値を重複度も込めて, λ_1, λ_2, …, λ_n とする．ただし,

$$
\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \neq 0, \quad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0 \tag{3}
$$

である．次は, (2) の左辺の第 2 項が 0 になるかどうかで場合分けを行おう．

定義 12.1　2 次超曲面 (1) を考える．ある $q \in \mathbf{R}^n$ が存在し,

$$
Aq + b = 0 \tag{4}
$$

となるとき, (1) は有心であるという．(1) は有心でないとき, 無心であるという．

(1) が有心な場合, (4) がなりたつように $q \in \mathbf{R}^n$ を選んでおくと, (2) は

$$
{}^t y({}^t PAP)y + {}^t qAq + 2{}^t bq + c = 0 \tag{5}
$$

となる．よって, $y \in \mathbf{R}^n$ が (5) の解ならば, $-y$ も (5) の解である．すなわち, (5) が表す $\mathbf{R}^n$ の部分集合は原点に関して対称である．したがって, (1) が表す $\mathbf{R}^n$ の部分集合は点 q に関して対称である．これが「有心」という言葉の意味である．特に, A が正則なとき, 問題 11.1 で扱ったように, $q = -A^{-1}b$ とおくと, (4) がなりたつから, (1) は有心である．

例 12.1　例 11.1, 例 11.2 で述べた楕円, 双曲線は有心である．
一方, 例 11.3 で述べた放物線は無心である．

例 12.2 (楕円面)　$a, b, c > 0$ とする．このとき, 2 次曲面

$$
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1
$$

は有心である．これを楕円面という．

例 12.3 (一葉双曲面)　$a, b, c > 0$ とする．このとき, 2 次曲面

$$
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1
$$

は有心である．これを一葉双曲面という．

例 12.4 (二葉双曲面) $a, b, c > 0$ とする．このとき, 2次曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

は有心である．これを二葉双曲面という．

例 12.5 (楕円放物面) $a, b > 0$ とする．このとき, 2次曲面

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

は無心である．これを楕円放物面という．

例 12.6 (双曲放物面) $a, b > 0$ とする．このとき, 2次曲面

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

は無心である．これを双曲放物面という．

さて, (1) を有心2次超曲面とする．このとき, 上で述べたように, (1) は (5) に変形することができる．ここで, 対称行列は直交行列によって対角化可能だから, P を

$$ {}^tPAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

となるように選んでおくことができる．このとき, (3) より, (5) は

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_r y_r^2+d=0 \tag{7}$$

となる．ただし, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ は y の成分, すなわち, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ であり,

$$d={}^tqAq+2{}^tbq+c \tag{8}$$

である．(7) を有心2次超曲面の標準形という．

次に, (1) を無心2次超曲面とする．まず, $r=n$, すなわち, A が正則であると仮定すると, (1) は有心となり矛盾である．よって, $r<n$ である．

ここで, 有心な場合と同様に, P を (6) がなりたつように選んでおくと, (2) は

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_r y_r^2+2(b'_1y_1+b'_2y_2+\cdots+b'_ny_n)+d=0,$$

すなわち,

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{b'_1}{\lambda_1}\right)^2+\cdots+\lambda_r\left(y_r+\frac{b'_r}{\lambda_r}\right)^2+2(b'_{r+1}y_{r+1}+\cdots+b'_ny_n)+d'=0 \tag{9}$$

となる．ただし, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ は y の成分であり, d は (8) により定め,

$$(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)={}^t(Aq+b)P, \quad d'=d-\frac{(b'_1)^2}{\lambda_1}-\frac{(b'_2)^2}{\lambda_2}-\cdots-\frac{(b'_r)^2}{\lambda_r}$$

である. よって, $z \in \mathbf{R}^n$ の成分を $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ とし,

$$z = g_1(y), \quad z_i = y_i + \frac{b'_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \quad z_i = y_i \quad (i = r+1, r+2, \ldots, n)$$

とおくと, g_1 は $\mathbf{R}^n$ の等長変換を定め, (9) は

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 + 2(b'_{r+1} z_{r+1} + b'_{r+2} z_{r+2} + \cdots + b'_n z_n) + d' = 0 \tag{10}$$

となる.

ここで, 仮定より, (1) は無心だから, $b'_{r+1},\ b'_{r+2},\ \ldots,\ b'_n$ の内の少なくとも 1 つは 0 ではない. よって,

$$p = \sqrt{(b'_{r+1})^2 + (b'_{r+2})^2 + \cdots + (b'_n)^2}$$

とおくと, $p > 0$ である. このとき, 例 10.5 より, ある $P' \in \mathrm{O}(n-r)$ が存在し,

$$P' \begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ b'_{r+2} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

すなわち,

$$(b'_{r+1}, b'_{r+2}, \ldots, b'_n) = (p, 0, \ldots, 0)P' \tag{11}$$

となる. また,

$$P'' = \begin{pmatrix} E & O \\ O & P' \end{pmatrix}$$

とおくと, $P'' \in \mathrm{O}(n)$ である. 更に,

$$u = g_2(z) = P'' z$$

とおくと, g_2 は $\mathbf{R}^n$ の等長変換を定め, $u \in \mathbf{R}^n$ の成分を $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ とすると, (11) より, (10) は

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \cdots + \lambda_r u_r^2 + 2p u_{r+1} + d' = 0 \tag{12}$$

となる.

最後に, $v \in \mathbf{R}^n$ の成分を $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ とし,

$$v = g_3(u), \quad v_i = u_i \quad (i \neq r+1), \quad v_{r+1} = u_{r+1} + \frac{d'}{2p}$$

とおくと, g_3 は $\mathbf{R}^n$ の等長変換を定め, (12) は

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \cdots + \lambda_r v_r^2 + 2p v_{r+1} = 0 \tag{12}$$

となる. (12) を無心 2 次超曲面の標準形という.

注意 12.1 上の式変形において, 等長変換を表すときに用いる直交行列の行列式は, 必要ならば列の何れかを -1 倍することにより, すべて 1 とすることができる. よって, 2 次超曲面は鏡映を用いずに, 回転と平行移動の合成のみで標準形に写すことができる.

問題 12

1. $A \in \mathrm{Sym}(n)$, $A \neq O$, $b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とする.

(1) $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, $q \in \mathbf{R}^n$ とすると, 等式

$$\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ {}^tq & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tPAP & {}^tP(Aq+b) \\ {}^t(Aq+b)P & {}^tqAq + 2{}^tbq + c \end{pmatrix}$$

がなりたつことを示せ. 特に,

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix} = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} {}^tPAP & {}^tP(Aq+b) \\ {}^t(Aq+b)P & {}^tqAq + 2{}^tbq + c \end{pmatrix}$$

であることが分かる.

(2) 2 次超曲面

$$ {}^txAx + 2{}^tbx + c = 0 \qquad (*)$$

に対して,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, (1) より, $\mathrm{rank}\,\tilde{A}$ の値は 2 次超曲面を $\mathbf{R}^n$ の等長変換で写しても変わらない. 特に, $\mathrm{rank}\,\tilde{A} = n+1$ のとき, $(*)$ は固有であるという.

固有な有心 2 次超曲面の標準形を求めよ.

(3) 固有な無心 2 次超曲面の標準形を求めよ.

(4) 固有 2 次曲線は空集合, 楕円, 双曲線, 放物線の何れかであることを示せ. なお, 固有でない 2 次曲線は有心であり, 空集合, 1 点, 交わる 2 直線, 平行な 2 直線, 重なった 2 直線の何れかであることが分かる.

(5) 固有 2 次曲面は空集合, 楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 双曲放物面の何れかであることを示せ.

問題 12 の解答

1. (1) ${}^tA = A$ であることと 1 次行列は転置を取っても変わらないことに注意すると,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ {}^tq & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AP & Aq+b \\ {}^tbP & {}^tbq + c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^tPAP & {}^tP(Aq+b) \\ {}^tqAP + {}^tbP & {}^tq(Aq+b) + {}^tbq + c \end{pmatrix} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

である. よって, 題意の等式がなりたつ.

(2) $(*)$ は始めから標準形であるとしてよい.

$(*)$ が標準形であり, 有心な場合, $(*)$ は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + d = 0$$

と表される. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbf{R}$ である. このとき,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank} \tilde{A} &= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\Large 0} & & 0 \\ & \ddots & & O & \vdots \\ \text{\Large 0} & & \lambda_r & & 0 \\ & O & & O & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} r+1 & (d \neq 0), \\ r & (d = 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

である. よって, $\operatorname{rank} \tilde{A} = n+1$ となるのは $r = n$, $d \neq 0$ のときである. したがって, 求める標準形は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 + d = 0$$

である. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である.

(3) $(*)$ は始めから標準形であるとしてよい.

$(*)$ が標準形であり, 無心な場合, $(*)$ は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2p x_{r+1} = 0$$

と表される. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $p > 0$ である. このとき,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank} \tilde{A} &= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\Large 0} & & & & 0 \\ & \ddots & & & O & & \vdots \\ \text{\Large 0} & & \lambda_r & & & & 0 \\ & & & & & & p \\ & & & & & & 0 \\ & O & & & O & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p & 0 & \cdots \ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= r + 2
\end{aligned}
$$

である．よって, $\operatorname{rank}\tilde{A} = n+1$ となるのは $r = n-1$ のときである．したがって, 求める標準形は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2 + 2px_n = 0$$

である．ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $p > 0$ である．

(4) 標準形について考えればよい．

まず, (2) より, 固有な有心 2 次曲線の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + d = 0 \tag{a}$$

と表される．ただし, $\lambda, \mu, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である．

λ, μ, d の符号がすべて同じとき, (a) をみたす $x, y \in \mathbf{R}$ は存在しない．すなわち, (a) は空集合を表す．

λ, μ の符号が同じであり, d の符号が λ, μ の符号と異なるとき, (a) は楕円を表す．

λ, μ の符号が異なるとき, (a) は双曲線を表す．

また, (3) より, 固有な無心 2 次曲線の標準形は

$$\lambda x^2 + 2py = 0$$

と表される．ただし, $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $p > 0$ である．これは放物線を表す．

よって, 固有 2 次曲線は空集合, 楕円, 双曲線, 放物線の何れかである．

(5) 標準形について考えればよい．

まず, (2) より, 固有な有心 2 次曲面の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + d = 0 \tag{b}$$

と表される．ただし, $\lambda, \mu, \nu, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である．

λ, μ, ν, d の符号がすべて同じとき, (b) をみたす $x, y, z \in \mathbf{R}$ は存在しない．すなわち, (b) は空集合を表す．

λ, μ, ν の符号がすべて同じであり, d の符号が λ, μ, ν の符号と異なるとき, (b) は楕円面を表す．

λ, μ, ν の符号の内の 2 つが d の符号と同じであり, 残りの 1 つの符号が異なるとき, (b) は二葉双曲面を表す．

λ, μ, ν の符号の内の 2 つが d および残りの 1 つと符号が異なるとき, (b) は一葉双曲面を表す．

また, (3) より, 固有な無心 2 次曲面の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + 2pz = 0 \tag{c}$$

と表される．ただし, $\lambda, \mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $p > 0$ である．

λ, μ の符号が同じとき, (c) は楕円放物面を表す．

λ, μ の符号が異なるとき, (c) は双曲放物面を表す．

よって, 固有 2 次曲面は空集合, 楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 双曲放物面の何れかである．