§2. 行列値関数

線形代数に現れる行列は実数や複素数を成分とすることが多いが, 固有多項式を考える場合は関数を成分とする行列の行列式を考えた. すなわち, A を正方行列とすると, A の固有多項式は t を変数とする行列 $tE - A$ の行列式である. また, 微分積分においても, 重積分の変数変換公式には Jacobian という多変数関数を成分とする行列の行列式が現れた. 例えば, 極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

に対する Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

である.

そこで, まず§1 で扱ったベクトル値関数の一般化である, 関数を成分とする行列, すなわち, 行列値関数について考えよう. 簡単のため, 区間を定義域とする 1 変数の場合を扱うことにする. 行列値関数の微分は成分毎に考えればよい. F を区間 I で定義された行列値関数とするとき, 各成分が I で微分可能ならば, F は I で微分可能であるというように定めるのである. F の各成分を微分して得られる行列値関数を F' などと表す. 次の定理では行列の和や積を考えるが, そのような場合の行列の型は演算が可能なものであるとする.

定理 2.1　F, G を区間 I で微分可能な行列値関数とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $(F + G)' = F' + G'$.
(2) c を I で微分可能なスカラー値関数とすると, $(cF)' = c'F + cF'$.
(3) $(FG)' = F'G + FG'$.
(4) F が正則行列に値をとるならば, $(F^{-1})' = -F^{-1}F'F^{-1}$.

証明　(4) のみ示す.
まず, 正則行列の定義より, 等式

$$FF^{-1} = E$$

がなりたつ. この両辺を微分すると, (3) より,

$$F'F^{-1} + F(F^{-1})' = O$$

である. ただし, O は零行列である. 更に, この式を変形すると, (4) の等式が得られる. □

幾何学においては, $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数の他にも直交行列や実交代行列に値をとる関数がよく現れる. その背景となるのは次の事実である.

定理 2.2　F を区間 I で微分可能な正則行列に値をとる関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) F が直交行列に値をとるならば, $F'F^{-1}$ は実交代行列に値をとる.
(2) $F'F^{-1}$ が実交代行列に値をとり, ある $a \in I$ に対して, $F(a)$ が直交行列となるならば, F は直交行列に値をとる.

証明　(1): 直交行列の定義より, $F^{-1} = {}^tF$ だから,

$$\begin{aligned} F'F^{-1} + {}^t(F'F^{-1}) &= F'{}^tF + {}^t(F'{}^tF) \\ &= F'{}^tF + F{}^tF' \\ &= (F{}^tF)' \\ &= E' \\ &= O \end{aligned}$$

である．よって, $F'F^{-1}$ は実交代行列に値をとる．
(2): $F'F^{-1}$ が実交代行列に値をとるから,

$$\begin{aligned} O &= F'F^{-1} + {}^t(F'F^{-1}) \\ &= F'F^{-1} + {}^tF^{-1t}F' \\ &= {}^tF^{-1}({}^tFF' + {}^tF'F)F^{-1} \\ &= {}^tF^{-1}({}^tFF)'F^{-1} \end{aligned}$$

である．よって, $({}^tFF)' = O$ となるから, ${}^tFF$ は $t \in I$ に依らない正方行列である．ここで, $F(a)$ は直交行列だから, ${}^tFF$ は単位行列である．したがって, F は直交行列に値をとる． □

次に述べる行列の指数関数を用いることにより, 実交代行列から直交行列を作ることができる．以下では行列の級数が現れるが, 収束に関する厳密な議論は省略することとする．まず, 指数関数 e^x に対する Maclaurin 展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を思い出そう．右辺は任意の複素数 x に対して収束することが分かる．上の式の x に正方行列 A を代入したものを考え,

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

とおく．右辺は任意の A に対して成分毎に収束することが分かる．$\exp A$ を A の指数関数という．

例 2.1 A を (i,i) 成分が λ_i の n 次の対角行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表す．$k = 0, 1, 2, \ldots$ とすると,

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

となる．よって,

$$\exp A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \text{\huge 0} \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

である．特に,

$$\exp O = E$$

である．

行列の指数関数に関して, 次は基本的である．

定理 2.3　A, B を n 次正方行列とすると, 次の (1)〜(5) がなりたつ.
(1) A と B が可換ならば,

$$\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B).$$

(2) $\exp A$ は正則であり,

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

(3) $\exp {}^t\!A = {}^t(\exp A)$.

(4) $\exp \overline{A} = \overline{\exp A}$.

(5) P を n 次正則行列とすると,

$$\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}.$$

証明　(1), (2) のみ示す.
(1): $k = 0, 1, 2, \dots$ とすると, A と B が可換ならば, 二項定理

$$(A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l}$$

がなりたつ. よって,

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p+q=k} \left(\frac{1}{p!} A^p \right) \left(\frac{1}{q!} B^q \right) \\
&= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} B^q \right) \\
&= (\exp A)(\exp B)
\end{aligned}$$

である.
(2): A と $-A$ は可換だから, (1) より,

$$\begin{aligned}
(\exp A)\exp(-A) &= \exp(A-A) \\
&= \exp O \\
&= E
\end{aligned}$$

である. よって, (2) がなりたつ. □

定理 2.3 (2), (3) を用いると, 次を示すことができる.

定理 2.4　A が実交代行列ならば, $\exp A$ は直交行列である.

証明　${}^t\!A = -A$ だから,

$$\begin{aligned}
{}^t(\exp A) &= \exp {}^t\!A \\
&= \exp(-A) \\
&= (\exp A)^{-1}
\end{aligned}$$

である. よって, $\exp A$ は直交行列である. □

問題 2

1. x, y を区間 I で微分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. 行列の積を用いることにより,

$$\langle x, y\rangle' = \langle x', y\rangle + \langle x, y'\rangle$$

がなりたつことを示せ.

2. 三角関数 $\sin x$, $\cos x$ に対して, Maclaurin 展開

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

がなりたつ.

(1) Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

を示せ.

(2) $\exp\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ を求めよ.

(3) 2 次の正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める. $(\exp A)(\exp B)$, $\exp(A+B)$ を求めよ.

(4) m を 0 でない整数とする. a, b, c が $a^2 + bc = -m^2\pi^2$ をみたすとき, $\exp\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ を求めよ.

3. A を正方行列とし, 区間 I で定義された行列値関数 F を

$$F(t) = \exp(tA) \quad (t \in I)$$

により定める. $F'F^{-1}$ および $F^{-1}F'$ を求めよ.

問題 2 の解答

1. 内積を行列の積を用いて表すと,

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle' &= (x^t y)' \\ &= x'^t y + x^t y' \\ &= \langle x', y\rangle + \langle x, y'\rangle\end{aligned}$$

である.

2. (1) 指数法則を用いて左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \cos x + i \sin x\end{aligned}$$

である.

(2) まず,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aE + bJ$$

と表しておく. ただし,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である. aE と bJ は可換であり, $J^2 = -E$ だから,

$$\begin{aligned}\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \exp(aE) \exp(bJ) \\ &= e^a \exp(bJ) \\ &= e^a \left(E + bJ - \frac{b^2}{2!} E - \frac{b^3}{3!} J + \cdots \right) \\ &= e^a \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \cdots \right) E + e^a \left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \cdots \right) J \\ &= e^a (\cos b) E + e^a (\sin b) J \\ &= \begin{pmatrix} e^a \cos b & e^a \sin b \\ -e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である.

(3) まず,

$$A^2 = B^2 = O$$

だから,

$$
\begin{aligned}
(\exp A)(\exp B) &= (E+A)(E+B) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である.

次に, (2) より,

$$
\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である.

(4) まず,

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}
$$

とおくと, 仮定より,

$$
A^2 = -m^2\pi^2 E
$$

である. よって,

$$
\begin{aligned}
\exp A &= E + A - \frac{m^2\pi^2}{2!}E - \frac{m^2\pi^2}{3!}A + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{m^2\pi^2}{2!} + \frac{m^4\pi^4}{4!} - \cdots\right)E + \frac{1}{m\pi}\left(m\pi - \frac{m^3\pi^3}{3!} + \frac{m^5\pi^5}{5!} - \cdots\right)A \\
&= (\cos m\pi)E + \frac{\sin m\pi}{m\pi}A \\
&= \begin{cases} E & (m \text{ は偶数}), \\ -E & (m \text{ は奇数}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

である.

3. まず,

$$
F(t) = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}
$$

だから,

$$
F' = AF = FA
$$

である. よって,

$$
F'F^{-1} = F^{-1}F' = A
$$

である.