§3. 微分方程式

微分方程式は自然現象や社会現象ばかりではなく, 曲線や曲面のような幾何学的対象を記述する際にも現れる. 微分方程式に現れる未知関数は多変数や行列値でもよいが, 簡単のため, 未知関数は実数値とし, 1 変数の微分方程式, すなわち, 常微分方程式を考えることにする. また, 関数は連続あるいはある程度微分可能であるとし, 定義域についてははっきり述べないことにする.

t, x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} の関数 $F(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ があたえられているとき, 未知関数 $x(t)$ に対する関係式

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

を常微分方程式または単に微分方程式という. このとき, n を階数という. また, n 回微分可能な t の関数 $x(t)$ が上の式をみたすとき, $x(t)$ を解という. 微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

と表されるとき, 正規形であるという. 正規形の微分方程式の中でも具体的に解くことのできる, すなわち, 解を求めることのできる例を幾つか挙げよう.

例 3.1 (変数分離形) 正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

は変数分離形であるという. 右辺の $f(t)$ は t のみの関数, $g(x)$ は x のみの関数である.

$g(x) \neq 0$ とすると,

$$\frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt} = f(t)$$

である. 両辺を t で積分すると,

$$\int \frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt}\, dt = \int f(t)\, dt$$

となる. 左辺に置換積分法を用いると,

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt$$

が得られる.

$g(x_0) = 0$ をみたす定数 x_0 が存在するときは, 定数関数 $x(t) = x_0$ も上の微分方程式の解となる.

例 3.2 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = tx$$

は変数分離形である.

$x \neq 0$ とすると,

$$\int \frac{dx}{x} = \int t\, dt$$

となる. よって,

$$\log|x(t)| = \frac{1}{2}t^2 + C \quad (C \in \mathbf{R}),$$

すなわち,

$$x(t) = \pm e^C e^{\frac{1}{2}t^2}$$

である．$\pm e^C$ を改めて C とおくと, $C \neq 0$ であり,

$$x(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2}$$

となる．これは $C = 0$ のときも解である．

例 3.3 (同次形)　正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

は同次形であるという．

　まず,

$$y = \frac{x}{t}$$

とおくと,

$$x = ty$$

である．よって,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{dx}{dt} \\ &= y + t\frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

である．したがって,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t}$$

となる．これは変数分離形である．

例 3.4　微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} + 1}$$

は同次形である．よって,

$$y = \frac{x}{t}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{y + \sqrt{y^2+1} - y}{t} \\ &= \frac{\sqrt{y^2+1}}{t} \end{aligned}$$

だから,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{dt}{t}$$

となる．すなわち,

$$\log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \log|t| + C \quad (C \in \mathbf{R})$$

だから,

$$y + \sqrt{y^2+1} = \pm e^C t$$

である. $\pm e^C$ を改めて C とおくと, $C \neq 0$ であり,

$$y + \sqrt{y^2+1} = Ct \tag{1}$$

となる. 更に,

$$\frac{y^2 - (y^2+1)}{y - \sqrt{y^2+1}} = Ct,$$

すなわち,

$$y - \sqrt{y^2+1} = -\frac{1}{Ct} \tag{2}$$

である. (1), (2) より,

$$y = \frac{1}{2}\left(Ct - \frac{1}{Ct}\right)$$

である. したがって,

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(Ct^2 - \frac{1}{C}\right)$$

である.

例 3.5 (線形)　正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x + g(t)$$

は線形であるという.

上の微分方程式を変形すると,

$$e^{-\int f(t)\,dt}\frac{dx}{dt} - e^{-\int f(t)\,dt}f(t)x = e^{-\int f(t)\,dt}g(t),$$

すなわち,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int f(t)\,dt}x\right) = e^{-\int f(t)\,dt}g(t)$$

である. よって,

$$x(t) = e^{\int f(t)\,dt}\left(\int e^{-\int f(t)\,dt}g(t)\,dt + C\right) \quad (C \in \mathbf{R})$$

である.

例 3.6　微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = x + t$$

は線形である. $C \in \mathbf{R}$ とすると, 解は

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{\int dt}\left(\int e^{-\int dt}t\,dt + C\right) \\
&= e^t\left(\int e^{-t}t\,dt + C\right) \\
&= e^t\left(-e^{-t}t + \int e^{-t}\,dt + C\right) \\
&= e^t\left(-e^{-t}t - e^{-t} + C\right) \\
&= -t - 1 + Ce^t
\end{aligned}$$

である.

問題 3

1. 次の (1)〜(3) の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 \sin t.$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{t^2} + \dfrac{x}{t} - 1.$

(3) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t}{1+t^2}x + 2t.$

2. $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0, 1$ とする. 正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x + g(t)x^{\alpha}$$

を Bernoulli の微分方程式という.

(1) $y = x^{1-\alpha}$ とおくことにより, 上の微分方程式を線形微分方程式に帰着させよ.

(2) Bernoulli の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}x + \frac{e^t}{3x^2}$$

を解け.

3. 正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$$

を Riccati の微分方程式という. x_0 を上の微分方程式の 1 つの解とする. $y = x - x_0$ とおくことにより, 上の微分方程式を Bernoulli の微分方程式に帰着させよ.

問題 3 の解答

1. (1) $x \neq 0$ とすると,

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \sin t \, dt$$

となる. よって,

$$-\frac{1}{x(t)} = -\cos t + C \quad (C \in \mathbf{R}),$$

すなわち,

$$x(t) = \frac{1}{\cos t - C}$$

である.

また, $x(t) = 0$ も解である.

(2) まず,

$$y = \frac{x}{t}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{y^2 + y - 1 - y}{t} \\ &= \frac{y^2 - 1}{t} \end{aligned}$$

である.

$y^2 \neq 1$, すなわち, $x \neq \pm t$ とすると,

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dt}{t}$$

だから,

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \log |t| + C \quad (C \in \mathbf{R})$$

となる. すなわち,

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \log |t| + C$$

だから,

$$\frac{y-1}{y+1} = \pm e^{2C} t^2$$

である. $\pm e^{2C}$ を改めて C とおくと, $C \neq 0$ であり,

$$y = \frac{1 + Ct^2}{1 - Ct^2}$$

となる. よって,

$$x(t) = t \frac{1 + Ct^2}{1 - Ct^2}$$

である.

また, $x(t) = \pm t$ も解である.

(3) $C \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt}\left(\int e^{-\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt} 2t\,dt + C\right) \\ &= e^{\log(1+t^2)}\left(\int e^{-\log(1+t^2)} 2t\,dt + C\right) \\ &= (1+t^2)\left(\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt + C\right) \\ &= (1+t^2)\left\{\log(1+t^2) + C\right\} \end{aligned}$$

である.

2. (1) $y = x^{1-\alpha}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= (1-\alpha)x^{-\alpha}\frac{dx}{dt} \\ &= (1-\alpha)x^{-\alpha}(f(t)x + g(t)x^{\alpha}) \\ &= (1-\alpha)f(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)g(t) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\frac{dy}{dt} = (1-\alpha)f(t)y + (1-\alpha)g(t)$$

となる. これは y に関する線形微分方程式である.

(2) $y = x^3$ とおくと,

$$\frac{dy}{dt} = y + e^t$$

となる. よって, $C \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} y &= e^{\int dt}\left(\int e^{-\int dt} e^t\,dt + C\right) \\ &= e^t\left(\int e^{-t}e^t\,dt + C\right) \\ &= e^t(t + C) \end{aligned}$$

である. したがって,

$$x(t) = \left\{e^t(t+C)\right\}^{\frac{1}{3}}$$

である.

3. $x = y + x_0$ を代入すると,

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx_0}{dt} = f(t)(y+x_0)^2 + g(t)(y+x_0) + h(t)$$

である. よって,

$$\frac{dy}{dt} = f(t)y^2 + (2f(t)x_0 + g(t))y + \left(f(t)x_0^2 + g(t)x_0 + h(t) - \frac{dx_0}{dt}\right)$$

である. x_0 は解だから,

$$\frac{dy}{dt} = (2f(t)x_0 + g(t))y + f(t)y^2$$

となる. これは y に関する Bernoulli の微分方程式である.