§7. 曲線の長さ

Euclid 空間内の曲線に対して, その長さを考えることができる. 線分の長さは三平方の定理を用いて計算することができるが, 曲線の長さの場合は曲線を折れ線で近似すればよい. 有界閉区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数として定義される曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$$

を考えよう. このとき, γ の長さは定積分

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

によりあたえられることが分かる. $[a,b]$ を単に I と表すときは上の定積分を

$$\int_I \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt \tag{$*$}$$

と表す. 曲線の長さは $n=2$ の場合は微分積分においても扱われるが, 上の式はその一般化である. 特に, γ が

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad (t \in [a,b])$$

により定められるスカラー値関数のグラフの場合は長さは

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\dot{f}(t)\right)^2}\, dt$$

である.

例 7.1 $a, b > 0$ とし, 楕円

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. γ の長さを L とおくと,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt \end{aligned}$$

である. これは楕円積分という積分の一種であり, 一般には L の値を具体的に求めることはできないが, $a=b$ のときは γ は半径 a の円であり, $L = 2\pi a$ となる.

また, $a \geq b$ とし,

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

とおくと,

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\, dt$$

となる. ε を離心率という.

I を有界閉区間とし, 向きを保つ変数変換

$$\varphi : J \to I$$

を考えよう. すなわち, J は有界閉区間であり, 任意の $u \in J$ に対して $\dot{\varphi}(u) > 0$ である.
上の変数変換を用いて, 曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

に対して, 新たに曲線

$$\gamma \circ \varphi : J \to \mathbf{R}^n$$

を定めることができる. γ と $\gamma \circ \varphi$ はベクトル値関数としては異なるが, 像は同じである. このとき, 2 つの曲線の長さは元々の定義によれば一致すべきである. すなわち, 曲線の長さは径数表示に依存しない. このことは $(*)$ の計算を行うことによっても確かめることができる. 実際, 置換積分を行うと,

$$\begin{aligned} \int_J \left\| \frac{d}{du}(\gamma \circ \varphi)(u) \right\| du &= \int_J \|\dot{\gamma}(\varphi(u))\dot{\varphi}(u)\| \, du \\ &= \int_J \|\dot{\gamma}(\varphi(u))\|\dot{\varphi}(u) \, du \\ &= \int_I \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt \end{aligned}$$

である.
ここでは正則な曲線を考えているから, 曲線は逆戻りすることなく点が動いて得られる軌跡とみなすことができる. このとき, 直観的には点の動く速度を調節することにより, 速さを一定に保つことができそうである. 次に示すようにそれは正しい. 区間 I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数として定義される曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

を考え, $t_0 \in I$ を固定しておく. このとき, スカラー値関数

$$L : I \to \mathbf{R}$$

を

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt \quad (t \in I)$$

により定める. $L(t)$ を γ の t_0 から t までの長さという. γ は正則であるとしていることに注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \|\dot{\gamma}(t)\| \\ &> 0 \end{aligned}$$

だから, L は連続な単調増加関数となる. よって, L の像を J とおくと, J は区間であり, 更に関数

$$L : I \to J$$

の逆関数

$$L^{-1} : J \to I$$

が存在する．ここで, L^{-1} を用いて変数変換を考え, 曲線

$$\tilde{\gamma} : J \to \mathbf{R}^n$$

を

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ L^{-1}$$

により定める．γ と $\tilde{\gamma}$ はベクトル値関数としては異なるが, 像は同じである．合成関数および逆関数の微分法より,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}(u) &= \dot{\gamma}(t)\frac{dL^{-1}}{du} \\ &= \dot{\gamma}(t)\frac{1}{\frac{dL}{dt}} \\ &= \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

である．したがって, $\tilde{\gamma}$ は正則であり,

$$\begin{aligned} \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\| &= \left\| \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

である．

　更に, $u_0 \in J$ を固定しておき, $u \in J$ とすると, $\tilde{\gamma}$ の u_0 から u までの長さは

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u} \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\|\, du &= \int_{u_0}^{u} du \\ &= u - u_0 \end{aligned}$$

である．このことから次のように定義する．

定義 7.1　曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

は任意の $t \in I$ に対して

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$$

となるとき, 弧長により径数付けられているという．このとき, パラメータ t を弧長径数という．

例 7.2　原点中心, 半径 a の円

$$\gamma : [0, 2\pi a] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = \left(a\cos\frac{t}{a}, a\sin\frac{t}{a} \right) \quad (t \in [0, 2\pi a])$$

により定める．このとき,

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{\left(-\sin\frac{t}{a}\right)^2 + \cos^2\frac{t}{a}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である．よって, t は弧長径数である．

問題 7

1. γ を有界閉区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数として定義される $\mathbf{R}^n$ 内の曲線とする.

(1) $\|v\|=1$ となる任意の $v\in\mathbf{R}^n$ に対して,

$$\langle\gamma(b)-\gamma(a),v\rangle=\int_a^b\langle\dot\gamma(t),v\rangle\,dt\leq\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

がなりたつことを示せ.

(2) 不等式

$$\|\gamma(b)-\gamma(a)\|\leq\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

がなりたつことを示せ. 特に, あたえられた端点を結ぶ曲線の中で長さが最も短いものは線分であることが分かる.

2. $a>0$ とし, 平面曲線

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t)=(a\cos^3 t,a\sin^3 t)\quad(t\in[0,2\pi])$$

により定める. γ を星芒形またはアステロイドという.

(1) $\dot\gamma(t)=0$ となる $t\in[0,2\pi]$ を求めよ.

(2) γ の長さを求めよ.

(3) $t_0\in[0,2\pi]$ を (1) で求めた以外の値とする. γ の $t=t_0$ における接線の陰関数表示は

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid(\sin t_0)x+(\cos t_0)y=a\cos t_0\sin t_0\}$$

であることを示せ.

(4) (3) の接線が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ A, B とする. 線分 AB の長さを求めよ.

3. $a>0$ とし, 平面曲線

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))\quad(t\in[0,2\pi])$$

により定める. γ を擺線(はいせん)またはサイクロイドという.

(1) $\dot\gamma(t)=0$ となる $t\in[0,2\pi]$ を求めよ.

(2) γ の長さを求めよ.

問題 7 の解答

1. (1) まず,

$$\begin{aligned}\int_a^b \langle\dot\gamma(t), v\rangle\,dt &= \int_a^b \frac{d}{dt}\langle\gamma(t), v\rangle\,dt \\ &= [\langle\gamma(t), v\rangle]_a^b \\ &= \langle\gamma(b), v\rangle - \langle\gamma(a), v\rangle \\ &= \langle\gamma(b)-\gamma(a), v\rangle\end{aligned}$$

である.

また, Cauchy-Schwarz の不等式より,

$$\begin{aligned}\langle\dot\gamma(t), v\rangle &\leq |\langle\dot\gamma(t), v\rangle| \\ &\leq \|\dot\gamma(t)\|\|v\| \\ &= \|\dot\gamma(t)\|\end{aligned}$$

である. よって,

$$\int_a^b \langle\dot\gamma(t), v\rangle\,dt \leq \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

である.

(2) $\gamma(a) = \gamma(b)$ のとき, 不等式は明らかになりたつ.

$\gamma(a) \neq \gamma(b)$ のとき, $v \in \mathbf{R}^n$ を

$$v = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{\|\gamma(b)-\gamma(a)\|}$$

により定めると, $\|v\| = 1$ である. よって, (1) より, 不等式がなりたつ.

2. (1) まず,

$$\dot\gamma(t) = (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t)$$

である. よって, $\dot\gamma(t) = 0$ とすると,

$$\cos^2 t\sin t = \sin^2 t\cos t = 0$$

である. これを解くと,

$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

である.

(2) γ の長さは $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の部分の長さを 4 倍して,

$$\begin{aligned}4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\dot\gamma(t)\|\,dt &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\,dt \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt \\ &= 12a\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6a\end{aligned}$$

である.

(3) γ の $t=t_0$ における接線の径数表示は

$$l(t) = (a\cos^3 t_0, a\sin^3 t_0) + (-3a\cos^2 t_0 \sin t_0, 3a\sin^2 t_0 \cos t_0)(t-t_0) \quad (t \in \mathbf{R})$$

である. ここで,

$$l(t) = (x, y)$$

とおくと,

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t_0 + (-3a\cos^2 t_0 \sin t_0)(t-t_0), \\ y = a\sin^3 t_0 + (3a\sin^2 t_0 \cos t_0)(t-t_0) \end{cases}$$

である. t を消去すると, 陰関数表示

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (\sin t_0)x + (\cos t_0)y = a\cos t_0 \sin t_0\}$$

を得る.

(4) 接線の陰関数表示の式に $y=0$ を代入すると, $x = a\cos t_0$ だから, A の座標は $(a\cos t_0, 0)$ である. また, $x=0$ を代入すると, $y = a\sin t_0$ だから, B の座標は $(0, a\sin t_0)$ である. よって, 線分 AB の長さは

$$\sqrt{(a\cos t_0)^2 + (a\sin t_0)^2} = a$$

である.

3. (1) まず,

$$\dot\gamma(t) = (a(1-\cos t), a\sin t)$$

である. よって, $\dot\gamma(t) = 0$ とすると,

$$1 - \cos t = \sin t = 0$$

である. これを解くと,

$$t = 0, 2\pi$$

である.

(2) γ の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\|\, dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2 + (a\sin t)^2}\, dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt \\ &= 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= 2a(2+2) \\ &= 8a \end{aligned}$$

である.