§9. 四頂点定理

平面曲線に対する Frenet の標構は Frenet の公式という線形微分方程式をみたし, 平面曲線の基本定理より, 平面曲線の形は回転と平行移動を除いて曲率によって決まる. このとき, 考えている点の近くにおける曲線の形はその点の近くにおける曲率の振る舞いだけから決まり, 遠く離れた点における曲率の様子とは無関係である. これを局所的な性質という. ここでは, 卵形線という平面曲線について考え, 上に述べた局所的な性質とは対照的な大域的な性質として知られる四頂点定理について述べよう.

まず, 閉区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数として定義される曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$$

を考える. γ が端点において微分も込めて値が一致しているとき, すなわち,

$$\gamma(a) = \gamma(b), \quad \dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b), \quad \ddot{\gamma}(a) = \ddot{\gamma}(b), \quad \ldots$$

がなりたつとき, γ を閉曲線という. 閉曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$$

が自己交差しないとき, すなわち, $t_1, t_2 \in [a,b)$, $t_1 \neq t_2$ ならば $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ となるとき, γ は単純であるという.

単純平面閉曲線については, 次がなりたつ.

定理 9.1 (Jordan の曲線定理)　単純平面閉曲線は $\mathbf{R}^2$ を内部と外部の 2 つの領域に分ける.

上では閉曲線を端点において微分も込めて値が一致している曲線と定めたが, Jordan の曲線定理は単純平面閉曲線が連続ならばなりたつ. 連続な単純平面閉曲線を Jordan 曲線ともいう.

単純平面閉曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

に対して, γ 上の任意の 2 点を結ぶ線分が γ の外部の点を含まないとき, γ を凸閉曲線または卵形線という. また, κ を γ の曲率とする. κ が極大または極小となる γ 上の点を頂点という. なお, κ の微分が 0 となる点を頂点ということもある.

問題 8-2 (1) より, κ は

$$\kappa = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} \det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix}$$

によりあたえられる. これを用いて, 次の例を考えよう.

例 9.1　$a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ とし, 楕円

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める.

まず, γ は卵形線である.

次に,

$$\dot{\gamma} = (-a\sin t, b\cos t)$$

だから,

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$$

である. 更に,

$$\ddot{\gamma} = (-a\cos t, -b\sin t)$$

だから,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \ddot{\gamma}\end{pmatrix} &= (-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)\\ &= ab\end{aligned}$$

である. よって, κ を γ の曲率とすると,

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

である.

ここで, $a = \pm b$ のときを考えると, 円の曲率の絶対値は半径の逆数となり, 定数である. 逆に, 平面曲線の基本定理より, 曲率が 0 でない定数の単純平面閉曲線は円に限る.

一方, 円ではないときを考え, 簡単のため $a > b > 0$ とすると,

$$\kappa = \frac{ab}{\{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t\}^{\frac{3}{2}}}$$

より, κ は $t = 0, \pi, 2\pi$ のとき最大値 $\dfrac{a}{b^2}$ をとり, $t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{b}{a^2}$ をとる. したがって, 頂点は $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ の 4 つである.

四頂点定理について述べる前に, 微分積分においても扱う次の事実を思い出そう.

定理 9.2 (Weierstrass の定理) $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合で定義された実数値連続関数は最大値および最小値をもつ.

平面曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

の曲率を κ とすると, κ は有界閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数となるから, Weierstrass の定理より, κ の最大値および最小値が存在する.

更に, γ が閉曲線であるとしよう. このとき, κ が極大または極小となる点の個数は有限ならば偶数であるが, Weierstrass の定理から保証される頂点の個数は 2 つである. しかし, 卵形線の頂点の個数については次がなりたつ.

定理 9.3 (四頂点定理) 円ではない卵形線には少なくとも 4 つの頂点が存在する.

証明 背理法により示す.

弧長により径数付けられた曲率 κ の円ではない卵形線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (s \in [a, b])$$

と表しておき, γ の頂点が 2 つであると仮定する. γ の 1 つの頂点は $\gamma(a)$ であり, もう 1 つの頂点は $a < c < b$ をみたす c に対して $\gamma(c)$ であるとしてよい. 更に, κ は $s = a$ で最大値をとり,

$s=c$ で最小値をとるとしてよい．このとき, $a \le s \le c$ ならば $\kappa'(s) \le 0$ となり, $c \le s \le b$ ならば $\kappa'(s) \ge 0$ となる．

ここで, $\gamma(a)$ と $\gamma(c)$ を結ぶ直線 l を $p, q, r \in \mathbf{R}$ を用いて,

$$l = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, px + qy + r = 0\}$$

と表しておく．γ は卵形線だから, γ は l によって 2 つに分けられ, $a < s < c$ の部分と $c < s < b$ の部分は l を挟んで互いに反対側に存在する．よって, $[a,b]$ で定義された関数

$$\kappa'(s)(px(s) + qy(s) + r)$$

は符号を変えない, すなわち, 常に 0 以上であるか, 常に 0 以下であるかの何れかである．

また, $\{e, n\}$ を γ に対する Frenet の標構とすると,

$$e = (x', y'), \quad n = (-y', x')$$

だから, Frenet の公式

$$\begin{cases} e' = \kappa n, \\ n' = -\kappa e \end{cases}$$

は

$$\begin{cases} x'' = -\kappa y', \\ y'' = \kappa x' \end{cases}$$

と同値である．

更に, γ は閉曲線だから,

$$x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \quad x'(a) = x'(b), \quad y'(a) = y'(b), \quad \kappa(a) = \kappa(b)$$

である．

したがって, 部分積分を行うと,

$$\begin{aligned} \int_a^b \kappa'(s)(px(s) + qy(s) + r)\,ds &= [\kappa(s)(px(s) + qy(s) + r)]_a^b - \int_a^b \kappa(s)(px'(s) + qy'(s))\,ds \\ &= \int_a^b (-py''(s) + qx''(s))\,ds \\ &= [-py'(s) + qx'(s)]_a^b \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから, κ' は恒等的に 0 である．すなわち, κ は定数関数である．このとき, 例 9.1 より, γ は円となるから, 矛盾である．

以上より, γ は少なくとも 3 つの頂点をもつが, γ は閉曲線だから, 少なくとも 4 つの頂点をもつ． □

なお, 四頂点定理は単純閉曲線の場合についてもなりたつことが知られている．

問題 9

1. $a, b > 0$ とし, 平面閉曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = ((a\cos t + b)\cos t, (a\cos t + b)\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. γ を蝸牛線またはリマソンという. 特に, $a = b$ のときは γ を心臓形またはカージオイドという.

(1) $a \neq b$ のとき, γ は正則であることを示せ.

(2) $a = b$ のとき, γ の長さを求めよ.

(3) $a \neq b$ のとき, γ の曲率を κ とする. κ を求めよ.

(4) $a > b$ のとき, γ は原点において自己交差する単純でない閉曲線となることが分かる. このとき, γ の頂点を求めよ.

(5) $a < b$ のとき, γ は卵形線ではないが, 単純閉曲線となることが分かる. このとき, γ の頂点の個数を求めよ.

問題 9 の解答

1. (1) まず,

$$\dot{\gamma} = (-a\sin t\cos t - (a\cos t + b)\sin t, -a\sin t\sin t + (a\cos t + b)\cos t)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
\|\dot{\gamma}\|^2 &= \{-a\sin t\cos t - (a\cos t + b)\sin t\}^2 + \{-a\sin t\sin t + (a\cos t + b)\cos t\}^2 \\
&= a^2\sin^2 t + (a\cos t + b)^2 \\
&= a^2 + 2ab\cos t + b^2 \\
&= a^2 + 2ab\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right) + b^2 \\
&= (a-b)^2 + 4ab\cos^2\frac{t}{2}
\end{aligned}$$

である. $a \neq b$ だから, $\|\dot{\gamma}\| > 0$ である. したがって, 任意の $t \in [0, 2\pi]$ に対して $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ だから, γ は正則である.

(2) (1) の計算より,

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = 4a^2\cos^2\frac{t}{2}$$

である. γ の長さは $0 \leq t \leq \pi$ の部分の長さを 2 倍して,

$$\begin{aligned}
2\int_0^\pi \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt &= 4a\int_0^\pi \cos\frac{t}{2}dt \\
&= 4a\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^\pi \\
&= 8a
\end{aligned}$$

である.

(3) (1) の計算より,

$$\dot{\gamma} = (-a\sin 2t - b\sin t, a\cos 2t + b\cos t)$$

である. 更に,

$$\ddot{\gamma} = (-2a\cos 2t - b\cos t, -2a\sin 2t - b\sin t)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \ddot{\gamma}\end{pmatrix} &= (-a\sin 2t - b\sin t)(-2a\sin 2t - b\sin t) \\
&\quad - (a\cos 2t + b\cos t)(-2a\cos 2t - b\cos t) \\
&= 2a^2 + 3ab(\sin t\sin 2t + \cos t\cos 2t) + b^2 \\
&= 2a^2 + b^2 + 3ab\{2\sin^2 t\cos t + (\cos t)(1 - 2\sin^2 t)\} \\
&= 2a^2 + b^2 + 3ab\cos t
\end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3}\det\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \ddot{\gamma}\end{pmatrix} \\
&= \frac{2a^2 + b^2 + 3ab\cos t}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos t)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

である.

(4) (3) より,

$$
\begin{aligned}
\dot{\kappa} &= (-3ab\sin t)(a^2+b^2+2ab\cos t)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + (2a^2+b^2+3ab\cos t)\left(-\frac{3}{2}\right)(a^2+b^2+2ab\cos t)^{-\frac{5}{2}}(-2ab\sin t) \\
&= \frac{(3ab\sin t)\{-(a^2+b^2+2ab\cos t)+2a^2+b^2+3ab\cos t\}}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{(3a^2b\sin t)(a+b\cos t)}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}
$$

である. $a>b$ だから, $\dot{\kappa}(t)=0$ とすると, $\sin t=0$ である. よって,

$$t=0,\pi,2\pi$$

だから, 頂点の候補は

$$\gamma(0)=(a+b,0),\ \gamma(\pi)=(a-b,0)$$

である.

ここで,

$$\ddot{\kappa} = \frac{(3a^2b\cos t)(a+b\cos t)}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}} + (3a^2b\sin t)\frac{d}{dt}\frac{a+b\cos t}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}}$$

である. したがって,

$$
\begin{aligned}
\ddot{\kappa}(0) &= \frac{3a^2b}{(a+b)^4} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

だから, κ は $t=0$ で極小となり,

$$
\begin{aligned}
\ddot{\kappa}(\pi) &= -\frac{3a^2b}{(a-b)^4} \\
&< 0
\end{aligned}
$$

だから, κ は $t=\pi$ で極大となる.

以上より, γ の頂点は $(a\pm b,0)$ である.

(5) (4) と同様に, $(a\pm b,0)$ は γ の頂点である.

更に, $a<b$ だから, 方程式

$$a+b\cos t=0$$

は 2 つの解 t_1, t_2 をもち, $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ も頂点の候補である. ただし,

$$\frac{\pi}{2}<t_1<\pi<t_2<\frac{3}{2}\pi$$

である. このとき, (4) と同様に, $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ も γ の頂点となる. よって, γ の頂点は 4 つである.