§10. 回転数と全曲率

平面閉曲線に対して回転数という整数を考えることができる. 曲率 κ の弧長により径数付けられた平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対して, 定積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(s)\, ds$$

を γ の回転数という.

定理 10.1 平面閉曲線の回転数は整数である.

証明 $\{e, n\}$ を弧長により径数付けられた曲率 κ の平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構とする. このとき, $\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$ は SO(2) に値をとるから, $[a, b]$ で定義された関数 θ を用いて,

$$\begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) & \sin\theta(s) \\ -\sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{pmatrix} \quad (s \in [a, b])$$

と表すことができる. γ は閉曲線だから,

$$\cos\theta(a) = \cos\theta(b), \quad \sin\theta(a) = \sin\theta(b)$$

である. よって, $\theta(a) - \theta(b)$ は 2π の整数倍である.

また,

$$\begin{aligned} e' &= (-\theta' \sin\theta, \theta' \cos\theta) \\ &= \theta' n \end{aligned}$$

だから, Frenet の公式より,

$$\kappa = \theta'$$

である.

したがって, γ の回転数は

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta'(s) ds = \frac{1}{2\pi} \left(\theta(b) - \theta(a)\right)$$

となり, これは整数である. □

回転数の意味を考えてみよう. 原点中心, 半径 1 の円を S^1 と表すことにする. $\{e, n\}$ を弧長により径数付けられた曲率 κ の平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構とする. このとき, 任意の $s \in [a, b]$ に対して $e(s) \in S^1$ となるから, e は $[a, b]$ から S^1 への写像

$$e : [a, b] \to S^1$$

を定める. このように考えた e を γ に対する Gauss 写像という. 同様に, n も $[a,b]$ から S^1 への写像を定めるが, n を Gauss 写像ということもある.

Frenet の公式より,

$$e' = \kappa n$$

だから, κ は Gauss 写像の符号付きの速さを表す. よって, 回転数は Gauss 写像が行きつ戻りつした分は省いて S^1 を回った回数を表し, 値は整数である.

次に, 曲率の絶対値の積分を考えよう. 曲率 κ の弧長により径数付けられた平面閉曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

に対して, 定積分

$$\int_a^b |\kappa(s)|\, ds$$

を γ の全曲率という. κ が Gauss 写像 e の符号付きの速さを表すのに対して, $|\kappa|$ は e の速さを表すことに注意しよう. よって, 全曲率は e が行きつ戻りつした分すべて込みにして, 進んだ距離を表す.

定理 10.2 平面閉曲線の全曲率は 2π 以上である.

証明 $\{e, n\}$ を弧長により径数付けられた曲率 κ の平面閉曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構とし,

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (s \in [a,b])$$

と表しておくと,

$$e(s) = (x'(s), y'(s))$$

である.

Gauss 写像 e の像が半円より小さいと仮定する. 平面曲線の基本定理より, κ は回転と平行移動を合成しても変わらないから, e の像は上半円にあるとしてよい. すなわち, 任意の $s \in [a,b]$ に対して $y'(s) > 0$ である. このとき,

$$\int_a^b y'(s)\, ds > 0$$

である. 一方, γ は閉曲線だから,

$$\begin{aligned}\int_a^b y'(s)\, ds &= y(b) - y(a) \\ &= 0\end{aligned}$$

である. これは矛盾である.

よって, ある $s_0 \in (a,b)$ が存在し,

$$e(a) = -e(s_0)$$

としてよい. したがって,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |\kappa(s)|\,ds &= \int_a^{s_0} |\kappa(s)|\,ds + \int_{s_0}^b |\kappa(s)|\,ds \\
&\geq \pi + \pi \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

となる. □

定理 10.2 の等号成立条件について調べるには, 単純平面閉曲線に関する次の 2 つの事実が必要である.

定理 10.3 γ を単純平面閉曲線とすると, 次の (1)〜(3) は同値である.

(1) γ は卵形線である.

(2) γ の曲率の符号は変わらない, すなわち, 曲率は常に 0 以上であるか, 常に 0 以下である.

(3) γ の内部の領域は γ の任意の点における接線の片側にある.

定理 10.4 単純平面閉曲線の回転数は ± 1 である.

定理 10.3, 定理 10.4 を用いて, 次を示すことができる.

定理 10.5 平面閉曲線の全曲率が 2π となるのは卵形線のときに限る.

証明 $\{e, n\}$ を弧長により径数付けられた平面閉曲線

$$
\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2
$$

に対する Frenet の標構とし,

$$
\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (s \in [a, b])
$$

と表しておく.
γ の全曲率が 2π であると仮定する.
まず, γ が単純ではないと仮定する. このとき, ある $s_0 \in (a, b)$ が存在し

$$
\gamma(a) = \gamma(s_0)
$$

としてよい. 更に, 必要ならば回転を合成することにより, $y'(a), y'(s_0) \geq 0$ としてよい. このとき, 関数 y は少なくとも 4 つの極値をもつから, 全曲率は 2π より大きい. これは矛盾である. よって, γ は単純である.
次に, ある $s_0 \in [a, b)$ が存在し, γ の内部の領域が γ の $s = s_0$ における接線の両側にあると仮定する. このとき, 必要ならば回転を合成することにより, $e(s_0)$ は x 軸に平行であるとしてよいから, 上と同様に矛盾である. よって, 定理 10.3 より, γ は卵形線である.
逆に, γ が卵形線であると仮定する. γ は単純だから, 定理 10.4 より, 回転数は ± 1 である. また, γ は卵形線だから, 定理 10.3 より, 曲率の符号は変わらない. 更に, 全曲率は負とはならないから, γ の全曲率は 2π である. □

問題 10

1. Frenet の公式を直接解くことにより, 平面曲線を曲率を用いて表せ.

2. $a, b > 0$ とし, 楕円

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. このとき,

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

であり, 例 9.1 より, κ を γ の曲率とすると,

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

である.

定積分を直接計算することにより, γ の回転数を求めよ.

3. 曲率 κ, 回転数 m の弧長により径数付けられた平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対して, ある $c > 0$ が存在し, 任意の $s \in [a, b]$ に対して

$$0 < \kappa(s) \leq c$$

がなりたつとする. このとき, γ の長さは $\dfrac{2\pi m}{c}$ 以上であることを示せ.

4. $\{e, n\}$ を Frenet の標構とする弧長により径数付けられた卵形線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

を考える. このとき, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して,

$$n(s) = (\cos t, \sin t)$$

となる $s \in [a, b)$ が一意的に存在する. また, γ を t の関数とみなすと, $\gamma(t)$ および $\gamma(t + \pi)$ における接線は互いに平行となる. この 2 つの接線の幅を γ の t 方向の幅といい, $W(t)$ と表すことにする.

γ の長さは定積分

$$\int_0^{\pi} W(t)dt$$

に一致することを示せ. なお, この事実を Cauchy の公式という. また, W が定数の場合は Barbier の定理という.

問題 10 の解答

1. $\{e, n\}$ を弧長により径数付けられた曲率 κ の平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構とし, $[a, b]$ で定義された関数 θ を用いて,

$$\begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) & \sin\theta(s) \\ -\sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{pmatrix} \quad (s \in [a, b])$$

と表しておく. Frenet の公式より, $\kappa = \theta'$ だから, $s_0 \in [a, b]$ を固定しておくと,

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds + \theta(s_0) \quad (s \in [a, b])$$

である. $e = \gamma'$ だから,

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \int_{s_0}^{s} e(s) ds + \gamma(s_0) \\ &= \left(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(s)\, ds, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(s)\, ds \right) + \gamma(s_0) \end{aligned}$$

である.

2. 弧長径数 s を用いて, 楕円を区間 $[\alpha, \beta]$ からの写像として表しておく. このとき, 求める回転数は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \kappa(s)\, ds &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(t) \frac{ds}{dt}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab}{a^2 \tan^2 t + b^2} \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{ab}{a^2 x^2 + b^2}\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{a}{b} x \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である.

3. 仮定より,

$$0 < \int_a^b \kappa(s)\,ds \leq \int_a^b c\,ds$$

である. よって,

$$0 < 2\pi m \leq c(b-a)$$

である. γ の長さは $b-a$ であり, $c > 0$ だから,

$$b - a \geq \frac{2\pi m}{c}$$

である.

4. まず,

$$W(t) = -\langle \gamma(t), n(t) \rangle - \langle \gamma(t+\pi), n(t+\pi) \rangle$$

である. また,

$$e(s) = (\sin t, -\cos t)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi W(t)\,dt &= -\int_0^\pi \{\langle \gamma(t), n(t) \rangle + \langle \gamma(t+\pi), n(t+\pi) \rangle\}\,dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \langle \gamma(t), n(t) \rangle\,dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \langle \gamma(t), \dot{e}(t) \rangle\,dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d}{dt}\langle \gamma(t), e(t) \rangle - \langle \dot{\gamma}(t), e(t) \rangle \right\} dt \\
&= -\left[\langle \gamma(t), e(t) \rangle\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \langle \dot{\gamma}(t), e(t) \rangle\,dt
\end{aligned}$$

である. ここで, γ は閉曲線だから,

$$\left[\langle \gamma(t), e(t) \rangle\right]_0^{2\pi} = 0$$

である. また,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \langle \dot{\gamma}(t), e(t) \rangle\,dt &= \int_0^{2\pi} \left\langle \gamma'(s)\frac{ds}{dt}, e(s) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle e(s)\frac{ds}{dt}, e(s) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt}\|e(s)\|^2\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt}\,dt \\
&= \int_a^b ds \\
&= b - a
\end{aligned}$$

である. これは γ の長さに等しい.