§3. 全体集合

実際に集合を用いて数学を記述する場合は基礎となる集合を１つ固定しておき, その他の集合はその部分集合として表される場合が多い. このとき, 基礎となる集合を普遍集合または全体集合という.

例 3.1 1変数の微分積分では関数は $\mathbf{R}$ の部分集合で定義される. このとき, $\mathbf{R}$ は全体集合であり, $\mathbf{R}$ の部分集合としては問題1.6で述べた区間, 特に, 有界開区間や有界閉区間を考えることが多い.

線形代数では行列の計算のみを行うのであれば, 集合や写像の概念を強調する必要はないが, 先に進むに従ってこれらは必要不可欠となる. ここでは, $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間を考え, 次のように定めよう.

定義 3.1 V を集合とし, $x, y, z \in V$, $c, d \in \mathbf{R}$ とする. V に和という演算

$$x + y \in V$$

およびスカラー倍という演算

$$cx \in V$$

が定められ, 次の (1)〜(8) をみたすとき, V をベクトル空間という.

(1) $x + y = y + x$. (和の交換律)

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$. (和の結合律)

(3) ある $0 \in V$ が存在し, 任意の x に対して, $x + 0 = 0 + x = x$ となる.

(4) $c(dx) = (cd)x$. (スカラー倍の結合律)

(5) $(c + d)x = cx + dx$. (分配律)

(6) $c(x + y) = cx + cy$. (分配律)

(7) $1x = x$.

(8) $0u = 0$.

例 3.2 (数ベクトル空間) 実数を成分とする n 次の列ベクトル全体の集合を $\mathbf{R}^n$ と表す. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

である. $\mathbf{R}^n$ は行列としての和およびスカラー倍を用いることにより, ベクトル空間となる. $\mathbf{R}^n$ を数ベクトル空間という. なお, $\mathbf{R}^n$ の元は行ベクトルとすることもある.

線形代数では１つのベクトル空間を全体集合として固定しておき, その部分集合としては部分空間というものを考えることが多い.

定義 3.2 V をベクトル空間とし, $W \subset V$ とする. V の和およびスカラー倍により, W がベクトル空間となるとき, W を V の部分空間という.

X を全体集合とし, $A \subset X$ とする. このとき, $X \setminus A$ を A^c と表し, A の補集合という. 定義より,

$$A^c = \{x \in X \,|\, x \notin A\}$$

と表されるが, X を全体集合としているので, 単に

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

と表してもよい. 補集合に関して, 次がなりたつことは明らかであろう.

定理 3.1　X を全体集合とし, $A \subset X$ とする. このとき, 次の (1)〜(5) がなりたつ.
(1) $A \cup A^c = X$.
(2) $A \cap A^c = \emptyset$.
(3) $(A^c)^c = A$.
(4) $X^c = \emptyset$.
(5) $\emptyset^c = X$.

例 3.3　X を全体集合とし, $A, B \subset X$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A \cup B^c) &= \{A \cap (A \cup B^c)\} \cup \{B \cap (A \cup B^c)\} \quad (\text{分配律}) \\
&= \{(A \cup B^c) \cap A\} \cup \{(A \cup B^c) \cap B\} \quad (\text{交換律}) \\
&= (A \cap A) \cup (B^c \cap A) \cup (A \cap B) \cup (B^c \cap B) \quad (\text{分配律}) \\
&= A \cup (B^c \cap A) \cup (B \cap A) \cup \emptyset \quad (\text{交換律および定理 3.1 (2)}) \\
&= A \cup \{(B^c \cup B) \cap A\} \quad (\text{分配律}) \\
&= A \cup (X \cap A) \quad (\text{交換律および定理 3.1 (1)}) \\
&= A \cup A \\
&= A
\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) &= A \cap (A^c \cup B) \\
&= (A^c \cup B) \cap A \quad (\text{交換律}) \\
&= (A^c \cap A) \cup (B \cap A) \quad (\text{分配律}) \\
&= \emptyset \cup (A \cap B) \quad (\text{交換律および定理 3.1 (2)}) \\
&= A \cap B
\end{aligned}$$

である.

命題「P ならば Q」に対して, 命題「Q でないならば P でない」を元の命題の対偶という. 元の命題が真ならば, その対偶も真である. この事実は数学的な命題を証明する際に用いると便利な場合がある.

定理 3.2　X を全体集合とし, $A, B \subset X$ とする. このとき, $A \subset B$ であることと $A^c \supset B^c$ であることは同値である.

証明　$A \subset B$ であるとは $x \in A$ ならば $x \in B$ となることである. この命題の対偶は $x \notin B$ ならば $x \notin A$ である. すなわち, $x \in B^c$ ならば $x \in A^c$ だから, $B^c \subset A^c$ である. よって, 定理が証明された. □

全体集合を考えると, 定理 2.6 は次のように表すことができる.

定理 3.3 (de Morgan の法則)　X を全体集合とし, $A, B \subset X$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.
(2) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.

証明 (2) のみ示す.
まず,

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \{x\,|\,x\notin A\cap B\}\\ &= \{x\,|\,x\notin A\ \text{または}\ x\notin B\}\\ &= \{x\,|\,x\in A^c\ \text{または}\ x\in B^c\}\\ &= \text{右辺}\end{aligned}$$

である. よって, (2) がなりたつ. □

例 3.4 A, B を集合とする. このとき,

$$A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$$

であることを示そう.
まず, 定理 2.1 (2) より, $A\cap B\subset B$ である. よって, 定理 2.5 (2) より,

$$A\setminus B\subset A\setminus(A\cap B)$$

である.
次に, $x\in A\setminus(A\cap B)$ とする. このとき, $x\in A$ かつ $x\notin A\cap B$ である. よって, $x\in A$ かつ $x\notin B$ だから, $x\in A\setminus B$ である. したがって,

$$A\setminus(A\cap B)\subset A\setminus B$$

である.
以上より, 最初の等式が示された. 更に, 例 2.2 より,

$$A\setminus B = (A\cup B)\setminus B = A\setminus(A\cap B)$$

である.
ここで, X を全体集合とし, $A, B\subset X$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}A\setminus B &= \{x\,|\,x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B\}\\ &= \{x\,|\,x\in A\ \text{かつ}\ x\in B^c\}\\ &= A\cap B^c\end{aligned}$$

である. よって,

$$A\setminus B = A\cap B^c$$

である. したがって,

$$A\setminus B = (A\cup B)\setminus B = A\setminus(A\cap B) = A\cap B^c$$

である.

問題 3

1. X を全体集合とし, $A, B, C \subset X$ とする. 問題 2.2 で述べた対称差に関して, 次の (1)〜(4) がなりたつことを示せ.

(1) $A \ominus X = A^c$.

(2) $A \ominus A^c = X$.

(3) $A \ominus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(4) $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C)$. すなわち, 対称差は結合律をみたす.

2. A, B を集合とすると, $A \ominus Y = B$ をみたす集合 Y が一意的に存在することを示せ.

3. A_1, A_2, B_1, B_2 を集合とする. $A_1 \ominus A_2 = B_1 \ominus B_2$ ならば, $A_1 \ominus B_1 = A_2 \ominus B_2$ であることを示せ.

問題 3 の解答

1. (1) 対称差の定義より,

$$
\begin{aligned}
A \ominus X &= (A \setminus X) \cup (X \setminus A) \\
&= \emptyset \cup A^c \\
&= A^c
\end{aligned}
$$

である.

(2) 対称差の定義より,

$$
\begin{aligned}
A \ominus A^c &= (A \setminus A^c) \cup (A^c \setminus A) \\
&= \{A \cap (A^c)^c\} \cup (A^c \cap A^c) \\
&= (A \cap A) \cup A^c \\
&= A \cup A^c \\
&= X
\end{aligned}
$$

である.

(3) 右辺を変形すると,

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
&= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \quad (\text{de Morgan の法則}) \\
&= \{A \cap (A^c \cup B^c)\} \cup \{B \cap (A^c \cup B^c)\} \quad (\text{分配律}) \\
&= \{(A^c \cup B^c) \cap A\} \cup \{(A^c \cup B^c) \cap B\} \quad (\text{交換律}) \\
&= (A^c \cap A) \cup (B^c \cap A) \cup (A^c \cap B) \cup (B^c \cap B) \quad (\text{分配律}) \\
&= \emptyset \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup \emptyset \quad (\text{交換律}) \\
&= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&= A \ominus B
\end{aligned}
$$

である. よって, (3) がなりたつ.

(4) (3) より,

$$
\begin{aligned}
(A \ominus B)^c &= \{(A \cup B) \setminus (A \cap B)\}^c \\
&= \{(A \cup B) \cap (A \cap B)^c\}^c \\
&= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) \quad (\text{de Morgan の法則}) \\
&= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) \quad (\text{de Morgan の法則})
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$
\begin{aligned}
(A \ominus B) \ominus C &= \{(A \ominus B) \setminus C\} \cup \{C \setminus (A \ominus B)\} \\
&= [\{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \cap C^c] \cup \{C \cap (A \ominus B)^c\} \\
&= [\{(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\} \cap C^c] \cup [\{(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)\} \cap C] \\
&\quad (\text{交換律}) \\
&= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\
&\quad (\text{分配律}) \\
&= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\
&\quad (\text{交換律})
\end{aligned}
$$

である. 同様に,

$$
\begin{aligned}
A \ominus (B \ominus C) &= (B \ominus C) \ominus A \quad (\text{対称差に関する交換律}) \\
&= (B \cap C^c \cap A^c) \cup (B^c \cap C \cap A^c) \cup (B^c \cap C^c \cap A) \cup (B \cap C \cap A)
\end{aligned}
$$

である. 和集合と共通部分に関する交換律より, (4) がなりたつ.

2. まず, $A \ominus Y = B$ をみたす集合 Y が存在すると仮定する. A とこの式の両辺の対称差を取ると, 対称差に関する結合律より,

$$
\begin{aligned}
A \ominus B &= A \ominus (A \ominus Y) \\
&= (A \ominus A) \ominus Y \\
&= \emptyset \ominus Y \quad (A \ominus A = \emptyset) \\
&= Y \ominus \emptyset \quad (\text{対称差に関する交換律}) \\
&= Y \quad (Y \ominus \emptyset = Y)
\end{aligned}
$$

である.

逆に, $Y = A \ominus B$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
A \ominus Y &= A \ominus (A \ominus B) \\
&= (A \ominus A) \ominus B \\
&= \emptyset \ominus B \\
&= B
\end{aligned}
$$

である.

よって, $A \ominus Y = B$ をみたす集合 Y は一意的に存在し, $Y = A \ominus B$ である.

3. 仮定より,

$$
\{A_1 \ominus (A_1 \ominus A_2)\} \ominus B_2 = \{A_1 \ominus (B_1 \ominus B_2)\} \ominus B_2 \tag{$*$}
$$

である. $(*)$ の左辺を変形すると, 対称差に関する結合律より,

$$
\begin{aligned}
\{A_1 \ominus (A_1 \ominus A_2)\} \ominus B_2 &= (A_1 \ominus A_1) \ominus (A_2 \ominus B_2) \\
&= \emptyset \ominus (A_2 \ominus B_2) \\
&= A_2 \ominus B_2
\end{aligned}
$$

である. $(*)$ の右辺を変形すると, 対称差に関する結合律より,

$$
\begin{aligned}
\{A_1 \ominus (B_1 \ominus B_2)\} \ominus B_2 &= (A_1 \ominus B_1) \ominus (B_2 \ominus B_2) \\
&= (A_1 \ominus B_1) \ominus \emptyset \\
&= A_1 \ominus B_1
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$
A_1 \ominus B_1 = A_2 \ominus B_2
$$

である.