

## §5. 全射, 単射と合成写像

写像に関する基本的概念として, 全射および単射というものが挙げられる.

**定義 5.1**  $X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とする.

任意の  $y \in Y$  に対して, ある  $x \in X$  が存在し,  $y = f(x)$  となるとき,  $f$  を上への写像または全射という.

$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$  ならば,  $f(x_1) \neq f(x_2)$  となるとき,  $f$  を 1 対 1 の写像または単射という. 全射かつ単射である写像を全単射という.

**注意 5.1** 定義 5.1 において,  $f$  が全射であるとは  $f(X) = Y$  となることである.

また,  $f$  が単射であるとは, 対偶を考えると,  $x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2)$  ならば,  $x_1 = x_2$  となることである. よって,  $f$  がこの条件をみたすことを単射の定義としてもよい.

**例 5.1** 関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき,  $f$  は全射ではない. 実際, 例えば,  $-1$  は  $f$  の値域の元, すなわち,  $-1 \in \mathbf{R}$  であるが,  $f(x) = -1$  となる定義域の元, すなわち,  $x^2 = -1$  となる  $x \in \mathbf{R}$  は存在しない. また,  $f$  は単射ではない. 実際, 例えば,  $-1$  および  $1$  は定義域の異なる元, すなわち,  $-1, 1 \in \mathbf{R}, -1 \neq 1$  であるが,  $f(-1) = f(1) = 1$  である.

**例 5.2**  $X$  を空でない集合とし,  $n \in \mathbf{N}$  に対して,  $1$  から  $n$  までの自然数全体の集合を  $X_n$  とおく.  $X$  が  $n$  個の元からなる有限集合であるとは,  $X$  から  $X_n$  への全単射が存在することに他ならない.

問題 4.3 で述べたように, 定理 4.1 (3), (4), (9), (10) においては, 必ずしも等号がなりたつとは限らないのであった. しかし, 写像が全射或いは単射である場合は等号を示すことができる.

**定理 5.1**  $X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とし,  $A, A_1, A_2 \subset X, B, B_1, B_2 \subset Y$  とする. このとき, 次の (1)~(4) がなりたつ.

- (1)  $f$  が単射ならば,  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ .
- (2)  $f$  が単射ならば,  $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$ .
- (3)  $f$  が単射ならば,  $f^{-1}(f(A)) = A$ .
- (4)  $f$  が全射ならば,  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

**証明** (2), (4) のみ示す.

(2): まず, 定理 4.1 (4) より,

$$f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$$

は常になりたつ.

次に,  $y \in f(A_1 \setminus A_2)$  とする. このとき, 像の定義より, ある  $x \in A_1 \setminus A_2$  が存在し,  $y = f(x)$  となる. 特に,  $x \in A_1$  だから,  $y \in f(A_1)$  である. ここで,  $y \notin f(A_2)$  であることを背理法により示す.  $y \in f(A_2)$  であると仮定する. このとき, ある  $x' \in A_2$  が存在し,  $y = f(x')$  となる. 仮定より,  $f$  は単射だから,  $x = x'$  である. よって,  $x \in A_2$  となり,  $x \in A_1 \setminus A_2$  であることに矛盾する. したがって,  $y \notin f(A_2)$  だから,  $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$  である. すなわち,

$$f(A_1 \setminus A_2) \subset f(A_1) \setminus f(A_2)$$

である.

以上より, (2) がなりたつ.

(4): まず, 定理 4.1 (10) より,

$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$

は常になりたつ.

次に,  $y \in B$  とする. 仮定より,  $f$  は全射だから, ある  $x \in X$  が存在し,  $y = f(x)$  となる. よって, 逆像の定義より,  $x \in f^{-1}(B)$  である. 更に, 像の定義より,  $y \in f(f^{-1}(B))$  である. したがって,

$$f(f^{-1}(B)) \supset B$$

である.

以上より, (4) がなりたつ. □

次に, 合成写像について述べよう.  $X, Y, Z$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  をそれぞれ  $X$  から  $Y, Y$  から  $Z$  への写像とする. このとき,  $X$  から  $Z$  への写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

により定めることができる.  $g \circ f$  を  $f$  と  $g$  の合成写像または合成という.

**例 5.3** 集合  $X, Y, Z$  を  $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6\}, Z = \{7, 8, 9\}$  により定め, 写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  を  $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 5, g(4) = 9, g(5) = 8, g(6) = 7$  により定める. このとき, 合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  が定義される. 例えば,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) &= g(f(1)) \\ &= g(4) \\ &= 9 \end{aligned}$$

である.

写像の合成は結合律をみたす. すなわち, 次がなりたつ.

**定理 5.2 (結合律)**  $X, Y, Z, W$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$  をそれぞれ  $X$  から  $Y, Y$  から  $Z, Z$  から  $W$  への写像とする. このとき, 等式

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

がなりたつ. 特に,  $h \circ (g \circ f)$  および  $(h \circ g) \circ f$  はともに  $h \circ g \circ f$  と表しても構わない.

**証明** まず, 合成写像の定義より,  $h \circ (g \circ f)$  および  $(h \circ g) \circ f$  はともに  $X$  から  $W$  への写像である.

次に,  $x \in X$  とすると, 合成写像の定義より,

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x), \end{aligned}$$

すなわち,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

である.

よって, 等式

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

がなりたつ. □

**注意 5.2**  $X$  を空でない集合,  $f, g: X \rightarrow X$  を  $X$  から  $X$  への写像とする. このとき, 2つの合成写像  $g \circ f, f \circ g: X \rightarrow X$  を考えることができるが,  $f \circ g = g \circ f$  がなりたつとは限らない.

例えば,  $X = \mathbf{R}$  とし, 関数  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = -x + 1, \quad g(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, 直接計算することにより,

$$(g \circ f)(-1) = 4, \quad (f \circ g)(-1) = 0$$

となることが分かるから,

$$(g \circ f)(-1) \neq (f \circ g)(-1)$$

である. よって,  $g \circ f \neq f \circ g$  である.

写像の合成について, 次がなりたつ.

**定理 5.3**  $X, Y, Z$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  をそれぞれ  $X$  から  $Y, Y$  から  $Z$  への写像とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ. 特に,  $f, g$  がともに全単射ならば,  $g \circ f$  も全単射である.

(1)  $f, g$  がともに全射ならば,  $g \circ f$  は全射である.

(2)  $f, g$  がともに単射ならば,  $g \circ f$  は単射である.

**証明** (1)のみ示す.

$z \in Z$  とする. 仮定より,  $g$  は全射だから, ある  $y \in Y$  が存在し,  $z = g(y)$  となる. 更に, 仮定より,  $f$  は全射だから, ある  $x \in X$  が存在し,  $y = f(x)$  となる. よって,  $z = g(f(x))$ , すなわち,  $z = (g \circ f)(x)$  となる. したがって,  $g \circ f$  は全射である. □

また, 次がなりたつことが分かる.

**定理 5.4**  $X, Y, Z$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  をそれぞれ  $X$  から  $Y, Y$  から  $Z$  への写像とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1)  $g \circ f$  が全射ならば,  $g$  は全射である.

(2)  $g \circ f$  が単射ならば,  $f$  は単射である.

$X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とし,  $f$  が全単射であると仮定する. このとき,  $y \in Y$  とすると,  $f$  は全射であるから, ある  $x \in X$  が存在し,  $y = f(x)$  となる. 更に,  $f$  は単射であるから, このような  $x$  は一意的である. よって,  $y$  に対して  $x$  を対応させる規則を考えることができる. これを  $f^{-1}$  と表し,  $f$  の逆写像という.  $f^{-1}$  は  $Y$  から  $X$  への全単射となる. 更に,  $f^{-1}$  の逆写像は  $f$  である. なお, 写像を関数という場合は, 逆写像を逆関数ともいう.

**例 5.4 (指数関数, 対数関数)**  $a > 0, a \neq 1$  をみたす  $a$  を 1 つ固定しておく. このとき, 関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$  を

$$f(x) = a^x \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. すなわち,  $f$  は  $a$  を底とする指数関数である.  $f$  は全単射となるから,  $f$  の逆関数  $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が存在するが, これは  $a$  を底とする対数関数に他ならない. すなわち,

$$f^{-1}(y) = \log_a y \quad (y \in (0, +\infty))$$

である.

## 問題 5

1. 関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty)$  および  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R}), \quad g(x) = x^2 \quad (x \in [0, +\infty))$$

により定める.

(1)  $f$  は全射であるが, 単射ではないことを示せ.

(2)  $g$  は全射ではないが, 単射であることを示せ.

2.  $X, Y$  を空でない集合とし,  $X \subset Y$  とする.  $X$  から  $Y$  への包含写像は単射であることを示せ.

3. 集合  $X, Y$  を  $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4\}$  により定め, 写像  $f: X \rightarrow Y$  を  $f(1) = 3, f(2) = 3$  により定める.  $f$  は全射でも単射でもないことを示せ.

4. 関数  $f, g: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  を

$$f(x) = -x + 1, \quad g(x) = x^2 \quad (x \in \{0, 1\})$$

により定める. このとき,  $g \circ f = f \circ g$  であることを示せ.

5. 集合  $X, Y, Z$  を  $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4\}, Z = \{5\}$  により定め, 写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  を  $f(1) = 3, f(2) = 3, g(3) = 5, g(4) = 5$  により定める. このとき,  $g \circ f$  は全射であることを示せ. なお,  $g$  は全射であるが,  $f$  は全射ではないから, 特に, 定理 5.3 (1) の逆は必ずしもなりたないことが分かる.

6. 集合  $X, Y, Z$  を  $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}, Z = \{6, 7\}$  により定め, 写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  を  $f(1) = 3, f(2) = 4, g(3) = 6, g(4) = 7, g(5) = 7$  により定める. このとき,  $g \circ f$  は単射であることを示せ. なお,  $f$  は単射であるが,  $g$  は単射ではないから, 特に, 定理 5.3 (2) の逆は必ずしもなりたないことが分かる.

7.  $X, Y, Z$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  をそれぞれ  $X$  から  $Y, Y$  から  $Z$  への全単射とすると, 定理 5.3 より,  $g \circ f: X \rightarrow Z$  は  $X$  から  $Z$  への全単射である. このとき, 等式

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

がなりたつことを示せ.

8.  $V, W$  をベクトル空間,  $f: V \rightarrow W$  を  $V$  から  $W$  への線形写像とする.  $\text{Ker } f = \{0_V\}$  であることと  $f$  が単射であることは同値であることを示せ. ただし,  $\text{Ker } f$  は  $f$  の核を表し,  $0_V$  は  $V$  の零ベクトルを表す.

## 問題5の解答

1. (1) まず,  $y \in [0, +\infty)$  とする. このとき,  $x \in \mathbf{R}$  を  $x = \sqrt{y}$  により定めると,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sqrt{y}) \\ &= (\sqrt{y})^2 \\ &= y, \end{aligned}$$

すなわち,  $f(x) = y$  である. よって,  $f$  は全射である.

一方,  $-1, 1 \in \mathbf{R}$ ,  $-1 \neq 1$  であるが,

$$f(-1) = f(1) = 1$$

である. よって,  $f$  は単射ではない.

(2) まず,  $-1 \in \mathbf{R}$  であるが,  $f(x) = -1$ , すなわち,  $x^2 = -1$  となる  $x \in [0, +\infty)$  は存在しない. よって,  $f$  は全射ではない.

一方,  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$  とする. このとき,  $x_1^2 = x_2^2$  であり,  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$  より,  $x_1 = x_2$  である. よって,  $f$  は単射である.

2.  $\iota: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への包含写像とし,  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\iota(x_1) = \iota(x_2)$  とする. このとき, 包含写像の定義より,  $x_1 = x_2$  である. よって,  $\iota$  は単射である.

3. まず,  $4 \in Y$  であるが,  $f(x) = 4$  となる  $x \in X$  は存在しない. よって,  $f$  は全射ではない.

また,  $1, 2 \in X$ ,  $1 \neq 2$  であるが,

$$f(1) = f(2) = 3$$

である. よって,  $f$  は単射ではない.

したがって,  $f$  は全射でも単射でもない.

4. まず,  $g \circ f$  と  $f \circ g$  の定義域, 値域はともに  $\{0, 1\}$  であり, それぞれ等しい.

次に,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(0) &= g(f(0)) \\ &= g(1) \\ &= 1, \\ (f \circ g)(0) &= f(g(0)) \\ &= f(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) &= g(f(1)) \\ &= g(0) \\ &= 0, \\ (f \circ g)(1) &= f(g(1)) \\ &= f(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. よって, 任意の  $x \in \{0, 1\}$  に対して,  $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$  である.

したがって,  $g \circ f = f \circ g$  である.

5.  $Z$  の元は 5 のみだから,  $(g \circ f)(1) = 5$ ,  $(g \circ f)(2) = 5$  である. よって,  $g \circ f$  は全射である.
6.  $f$  および  $g$  の定義より,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) &= g(f(1)) \\ &= g(3) \\ &= 6, \\ (g \circ f)(2) &= g(f(2)) \\ &= g(4) \\ &= 7, \end{aligned}$$

すなわち,  $(g \circ f)(1) = 6$ ,  $(g \circ f)(2) = 7$  である. よって,  $g \circ f$  は単射である.

7. まず,  $(g \circ f)^{-1}$  は  $Z$  から  $X$  への写像である. 一方,  $g^{-1}$ ,  $f^{-1}$  はそれぞれ  $Z$  から  $Y$ ,  $Y$  から  $X$  への写像だから,  $f^{-1} \circ g^{-1}$  は  $Z$  から  $X$  への写像である. よって,  $(g \circ f)^{-1}$  と  $f^{-1} \circ g^{-1}$  の定義域, 値域はそれぞれ等しい.

次に,  $z \in Z$  とし,  $y = g^{-1}(z)$ ,  $x = f^{-1}(y)$  とおく. このとき,

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1})(z) &= f^{-1}(g^{-1}(z)) \\ &= f^{-1}(y) \\ &= x, \end{aligned}$$

すなわち,  $(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = x$  である. 一方, 逆写像の定義より,  $g(y) = z$ ,  $f(x) = y$  だから,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(y) \\ &= z, \end{aligned}$$

すなわち,  $(g \circ f)(x) = z$  である. よって,  $(g \circ f)^{-1}(z) = x$  である. したがって, 任意の  $z \in Z$  に対して,  $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$  である.

以上より, 題意の等式がなりたつ.

8. まず,  $\text{Ker } f = \{0_V\}$  であると仮定する.  $x_1, x_2 \in V$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$  とすると,  $f$  は線形写像だから,  $f(x_1 - x_2) = 0_W$  である. ただし,  $0_W$  は  $W$  の零ベクトルを表す. ここで, 仮定より,

$$x_1 - x_2 = 0_V,$$

すなわち,  $x_1 = x_2$  である. よって,  $f$  は単射である.

逆に,  $f$  が単射であると仮定する.  $x \in \text{Ker } f$  とすると, 核の定義および線形写像の性質より,

$$f(x) = f(0_V) = 0_W$$

である. ここで, 仮定より,  $x = 0_V$  である. よって,  $\text{Ker } f = \{0_V\}$  である.

したがって,  $\text{Ker } f = \{0_V\}$  であることと  $f$  が単射であることは同値である.