§7. 濃度

2つの集合を比較する上で基本的な概念が濃度である．ここでは, 2つの集合の濃度が等しいという概念について扱おう．

X, Y を空でない集合とする．X から Y への全単射が存在するとき, X と Y は濃度が等しいという．このとき, $X \sim Y$ と表すことにする．$X \sim Y$ でないときは $X \not\sim Y$ と表す．

定理 7.1 X, Y, Z を集合とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ．
(1) $X \sim X$.
(2) $X \sim Y$ ならば, $Y \sim X$.
(3) $X \sim Y$ かつ $Y \sim Z$ ならば, $X \sim Z$.

証明 (1): X 上の恒等写像 1_X は X から X への全単射である．よって, (1) がなりたつ．
(2): $f : X \to Y$ を X から Y への全単射とすると, f の逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ は Y から X への全単射である．よって, (2) がなりたつ．
(3): $f : X \to Y$ を X から Y への全単射, $g : Y \to Z$ を Y から Z への全単射とする．このとき, f と g の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は X から Z への全単射である．よって, (3) がなりたつ． □

例 7.1 X を n 個の元からなる有限集合, Y を空でない集合とする．X と Y の濃度が等しいための必要十分条件は Y が n 個の元からなる有限集合であることはほとんど明らかであろう．

$\mathbf{N}$ と濃度が等しい集合を可算集合という．定理 7.1 (3) より, 可算集合と濃度が等しい集合は可算集合である．また, 有限集合と可算集合を合わせて高々可算集合という．

基本的な可算集合の例を幾つか挙げよう．

例 7.2 $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Z}$ への写像 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ を

$$f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right] \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定める．ただし, $[\quad]$ は Gauss 記号, すなわち, $x \in \mathbf{R}$ に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数である．このとき, f は全単射となるから, $\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$ である．よって, $\mathbf{Z}$ は可算集合である．

また, X を偶数全体の集合とし, $\mathbf{Z}$ から X への写像 $g : \mathbf{Z} \to X$ を

$$g(m) = 2m \quad (m \in \mathbf{Z})$$

により定める．このとき, g は全単射となるから, $\mathbf{Z} \sim X$ である．$\mathbf{Z}$ は可算集合だから, X も可算集合である．

更に, Y を奇数全体の集合とし, X から Y への写像 $h : X \to Y$ を

$$h(l) = l + 1 \quad (l \in X)$$

により定める．このとき, h は全単射となるから, $X \sim Y$ である．X は可算集合だから, Y も可算集合である．

例 7.3 (Cantor の対関数) $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への写像 $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を

$$f(m, n) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + n \quad ((m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N})$$

により定める．f を Cantor の対関数という．このとき, f は全単射となるから, $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$ である．よって, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ は可算集合である．

更に, 次の定理より, 2つの可算集合の直積は可算集合である．

定理 7.2 X, Y, X', Y' を空でない集合とする．$X \sim X'$ かつ $Y \sim Y'$ ならば, $X \times Y \sim X' \times Y'$ である．

例 7.4 A を $\mathbf{N}$ の無限部分集合とし, $a \in A$ とする．このとき, a 以下の A の元の個数は有限である．この個数を $f(a)$ とおくと, $f(a)$ は A から $\mathbf{N}$ への全単射を定めるから, $A \sim \mathbf{N}$ である．よって, A は可算集合である．

更に, 可算集合の無限部分集合は可算集合である．

例 7.5 まず, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ はともに可算集合だから, 例 7.3 より, $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ は可算集合である．

次に, $A \subset \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ を

$$A = \{(1,0), (m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \,|\, n \neq 0 \text{ かつ } m \text{ と } n \text{ は互いに素}\}$$

により定める．A は可算集合 $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ の無限部分集合だから, 例 7.4 より, A は可算集合である．

ここで, A から $\mathbf{Q}$ への写像 $f : A \to \mathbf{Q}$ を

$$f(m,n) = \frac{n}{m} \quad ((m,n) \in A)$$

により定める．このとき, f は全単射となるから, $A \sim \mathbf{Q}$ である．したがって, $\mathbf{Q}$ は可算集合である．

$\mathbf{R}$ が非可算集合であること, すなわち, 可算集合ではないことを次に述べる Cantor の対角線論法により示すことができる．

例 7.6 (Cantor の対角線論法) $\mathbf{R}$ が非可算集合であることを背理法により示す．

$\mathbf{R}$ が可算集合であると仮定する．このとき, 左半開区間 $(0,1]$ は $\mathbf{R}$ の無限部分集合だから, 例 7.4 より, $(0,1]$ は可算集合である．よって, $\mathbf{N}$ から $(0,1]$ への全単射 $f : \mathbf{N} \to (0,1]$ が存在する．

各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $f(n)$ を 10 進法を用いて,

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.x_{11}x_{12}x_{13}\ldots, \\ f(2) &= 0.x_{21}x_{22}x_{23}\ldots, \\ f(3) &= 0.x_{31}x_{32}x_{33}\ldots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

と無限小数に展開しておく．ただし, $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots$ は 0 から 9 までの整数である．例えば,

$$1 = 0.999\ldots, \quad 0.2 = 0.1999\ldots$$

である．

ここで,

$$y_n = \begin{cases} 1 & (x_{nn} \text{ は偶数}), \\ 2 & (x_{nn} \text{ は奇数}), \end{cases} \quad y = 0.y_1y_2y_3\ldots$$

とおくと, $y \in (0,1]$ である．仮定より, f は全射だから, $y = f(n)$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する．一方, y と $f(n)$ の小数第 n 位は異なるから, $y \neq f(n)$ である．これは矛盾である．

したがって, $\mathbf{R}$ は非可算集合である．

例 7.7 まず, $\mathbf{R}$ から開区間 $(0,1)$ への写像 $f : \mathbf{R} \to (0,1)$ を

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1} x + \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める．このとき, f は全単射となるから, $\mathbf{R} \sim (0,1)$ である．

次に, $(0,1)$ から $(0,1]$ への写像 $g : (0,1) \to (0,1]$ を

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \left(\text{ある } n \in \mathbf{N} \text{ に対して } x = \dfrac{1}{2^n}\right), \\ x & \left(x = \dfrac{1}{2^n} \text{ となる } n \in \mathbf{N} \text{ が存在しない}\right) \end{cases}$$

により定める．このとき, g は全単射となるから, $(0,1) \sim (0,1]$ である．よって, 定理 7.1 (3) より, $\mathbf{R} \sim (0,1]$ である．

更に, I, J を区間とする．ただし, I, J は 1 個の元のみからなる区間ではないとする．このとき, I から J への全単射が存在することが分かるから, $I \sim J$ である．

次の Cantor の定理より, 任意の集合はその巾集合と濃度が等しくないことが分かる．

定理 7.3 (Cantor の定理)　X を空でない集合とすると, 2^X から X への単射は存在しない．

また, X から 2^X への全射は存在しない．

証明　まず, 2^X から X への単射 $f : 2^X \to X$ が存在すると仮定する．$A \subset X$ を

$$A = \{f(U) \,|\, U \in 2^X,\ f(U) \notin U\}$$

により定める．

$f(X) \notin X$ とすると, X の定義より, $f(X) \in X$ である．これは矛盾である．

$f(X) \in X$ とすると, X の定義より,

$$f(X) = f(U), \quad f(U) \notin U$$

となる $U \in 2^A$ が存在する．仮定より, f は単射だから, $X = U$ である．よって, $f(X) \notin X$ である．これは矛盾である．

したがって, 2^X から X への単射は存在しない．

次に, X から 2^X への全射 $g : X \to 2^X$ が存在すると仮定する．$B \subset X$ を

$$B = \{x \in X \,|\, x \notin g(x)\}$$

により定める．仮定より, g は全射だから, $g(x) = B$ となる $x \in X$ が存在する．

$x \notin B$ とすると, B の定義および $g(x) = B$ より,

$$x \in g(x) = B$$

である．よって, $x \in B$ である．これは矛盾である．

$x \in B$ とすると, B の定義および $g(x) = B$ より,

$$x \notin g(x) = B$$

である．よって, $x \notin B$ である．これは矛盾である．

したがって, X から 2^X への全射は存在しない．　□

問題 7

1. $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$ と $\mathbf{R}$ は濃度が等しいことを示せ.

2. X を空でない集合とし, $A \subset X$ とする. このとき, X から集合 $\{0, 1\}$ への写像, すなわち, X で定義され 0 または 1 に値をとる関数 $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

により定めることができる. χ_A を A の特性関数または定義関数という.

　X から $\{0, 1\}$ への写像全体の集合を $F(X, \{0, 1\})$ と表すことにする. 定義関数を用いることにより, $2^X \sim F(A, \{0, 1\})$ であることを示せ.

3. X を空でない集合とし, $A, B \subset X$ とする. 定義関数に関して, 次の (1), (2) がなりたつことを示せ.

(1) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$.

(2) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.

4. 整数を係数とする x の方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

の解となる複素数を代数的数という. 代数的数全体の集合は可算集合であることを示せ.

問題 7 の解答

1. $\mathbf{R}$ から $\mathbf{Z} \times [0, 1)$ への写像 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Z} \times [0, 1)$ を

$$f(x) = ([x], x - [x]) \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, f は全単射となるから, $\mathbf{Z} \times [0, 1) \sim \mathbf{R}$ である. $\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$, $\mathbf{R} \sim [0, 1)$ だから, 定理 7.2 より, $\mathbf{N} \times \mathbf{R} \sim \mathbf{R}$ である.

2. 2^X から $F(X, \{0, 1\})$ への写像 $\Phi : 2^X \to F(X, \{0, 1\})$ を

$$\Phi(A) = \chi_A \quad (A \in 2^X)$$

により定める.

まず,

$$A, A' \in 2^X, \quad A \neq A'$$

とすると, $A \setminus A' \neq \emptyset$ または $A' \setminus A \neq \emptyset$ である. 一般性を失うことなく, $A \setminus A' \neq \emptyset$ としてよい. このとき, $x \in A \setminus A'$ とすると,

$$\chi_A(x) = 1, \quad \chi_{A'}(x) = 0$$

だから, $\chi_A \neq \chi_{A'}$ である. すなわち,

$$\Phi(A) \neq \Phi(A')$$

である. よって, Φ は単射である.

次に, $f \in F(X, \{0, 1\})$ とする. $A \in 2^X$ を

$$A = f^{-1}(\{1\})$$

により定めると,

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \chi_A \\ &= f \end{aligned}$$

である. よって, Φ は全射である.

したがって, Φ は全単射だから, $2^A \sim F(A, \{0, 1\})$ である.

3. (1) まず, $x \in A \cup B$ とすると,

$$\chi_{A \cup B}(x) = 1$$

である. また, このとき, $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, $x \in A \cap B$ の何れか 1 つのみがなりたつ.

$x \in A \setminus B$ のとき,

$$\begin{aligned} (\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B})(x) &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) \\ &= 1 + 0 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である.

$x \in B \setminus A$ のとき, 上と同様に,

$$(\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B})(x) = 1$$

である.

$x \in A \cap B$ のとき,

$$\begin{aligned}(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) \\ &= 1 + 1 - 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

である.

次に, $x \in X \setminus (A \cup B)$ とすると,

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = \chi_{A\cap B}(x) = 0$$

だから,

$$\chi_{A\cup B}(x) = (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) = 0$$

である.

よって, (1) がなりたつ.

(2) まず, $x \in A \cap B$ とすると,

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$$

だから,

$$(\chi_A \chi_B)(x) = \chi_A(x)\chi_B(x) = 1$$

である.

次に, $x \in X \setminus (A \cap B)$ とすると,

$$\chi_{A\cap B}(x) = 0$$

である. de Morgan の法則より,

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

だから, $\chi_A(x) = 0$ または $\chi_B(x) = 0$ である. よって,

$$(\chi_A \chi_B)(x) = 0$$

である.

したがって, (2) がなりたつ.

4. X を整数を係数とする x の 1 次以上の多項式全体の集合, Y を 2 以上の自然数全体の集合とし, X から Y への写像 $\Phi : X \to Y$ を

$$\Phi(f) = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$$

$$(f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in X)$$

により定める. このとき, 任意の $m \in Y$ に対して, $\Phi^{-1}(\{m\})$ は空でない有限集合である. よって, $\Phi^{-1}(\{m\})$ のある元 f に対して, 方程式 $f(x) = 0$ の解となる代数的数全体の集合は空でない有限集合である. したがって, 代数的数全体の集合は可算集合である.