§8. Bernstein の定理

2 つの集合の濃度が等しいことを示すために, 全単射を具体的に構成することは必ずしも易しいことではないが, 次に述べる Bernstein の定理が有効な場合がある.

定理 8.1 (Bernstein の定理) X, Y を空でない集合とする. X から Y および Y から X への単射が存在するならば, $X \sim Y$ である.

証明 $f : X \to Y$ を X から Y への単射, $g : Y \to X$ を Y から X への単射とする. $y \in Y$ に対して, $y = f(x)$ となる $x \in X$ が存在するとき, $y \leftarrow\!\shortmid x$ と表すことにする. f は単射だから, このような x は存在するならば一意的である. 同様に, $x \in X$ に対して, $x = g(y)$ となる $y \in Y$ が存在するとき, $x \leftarrow\!\shortmid y$ と表す.

$A_\infty, A_X, A_Y \subset X$ を

$$
\begin{aligned}
A_\infty &= \{x \in X \,|\, x \leftarrow\!\shortmid y_1 \leftarrow\!\shortmid x_1 \leftarrow\!\shortmid y_2 \leftarrow\!\shortmid x_2 \leftarrow\!\shortmid \cdots\},\\
A_X &= \left\{ x \in X \,\middle|\, \begin{array}{l} x = x_1 \leftarrow\!\shortmid y_1 \leftarrow\!\shortmid \cdots \leftarrow\!\shortmid y_{n-1} \leftarrow\!\shortmid x_n \text{ かつ} \\ x_n = g(y_n) \text{ となる } y_n \in Y \text{ は存在しない} \end{array} \right\},\\
A_Y &= \left\{ x \in X \,\middle|\, \begin{array}{l} x \leftarrow\!\shortmid y_1 \leftarrow\!\shortmid x_1 \leftarrow\!\shortmid \cdots \leftarrow\!\shortmid x_{n-1} \leftarrow\!\shortmid y_n \text{ かつ} \\ y_n = f(x_n) \text{ となる } x_n \in X \text{ は存在しない} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

により定める. また, $B_\infty, B_X, B_Y \subset Y$ を

$$
\begin{aligned}
B_\infty &= \{y \in Y \,|\, y \leftarrow\!\shortmid x_1 \leftarrow\!\shortmid y_1 \leftarrow\!\shortmid x_2 \leftarrow\!\shortmid y_2 \leftarrow\!\shortmid \cdots\},\\
B_X &= \left\{ y \in Y \,\middle|\, \begin{array}{l} y \leftarrow\!\shortmid x_1 \leftarrow\!\shortmid y_1 \leftarrow\!\shortmid \cdots \leftarrow\!\shortmid y_{n-1} \leftarrow\!\shortmid x_n \text{ かつ} \\ x_n = g(y_n) \text{ となる } y_n \in B \text{ は存在しない} \end{array} \right\},\\
B_Y &= \left\{ y \in Y \,\middle|\, \begin{array}{l} y = y_1 \leftarrow\!\shortmid x_1 \leftarrow\!\shortmid \cdots \leftarrow\!\shortmid x_{n-1} \leftarrow\!\shortmid y_n \text{ かつ} \\ y_n = f(x_n) \text{ となる } x_n \in X \text{ は存在しない} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

により定める. このとき,

$$X = A_\infty \cup A_X \cup A_Y, \quad Y = B_\infty \cup B_X \cup B_Y,$$

$$f(A_\infty) = B_\infty, \quad f(A_X) = B_X, \quad g(B_Y) = A_Y$$

であり, A_∞, A_X, A_Y および B_∞, B_X, B_Y はそれぞれ互いに素である. また, f, g は単射だから, f は A_∞ から B_∞ および A_X から B_X への全単射, g は B_Y から A_Y への全単射を定める. よって, X から Y への写像 $h : X \to Y$ を

$$
h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in A_\infty \cup A_X), \\ g^{-1}(x) & (x \in A_Y) \end{cases}
$$

により定めると, h は全単射である. したがって, $X \sim Y$ である. □

例 8.1 まず, 閉区間 $[0, 1]$ から $\mathbf{R}$ への包含写像は単射である.

一方, 例 7.7 で述べたように, $\mathbf{R}$ から開区間 $(0, 1)$ への全単射が存在する. 定理 5.3 (2) より, この写像と $(0, 1)$ から $[0, 1]$ への包含写像の合成写像は $\mathbf{R}$ から $[0, 1]$ への単射である.

よって, Bernstein の定理より, $\mathbf{R} \sim [0, 1]$ である.

例 8.2 まず, $x, y \in (0, 1]$ を 10 進法により

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots, \quad y = 0.y_1y_2y_3\ldots$$

と無限小数に展開しておく. このとき,

$$z = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$$

とおくと, $z \in (0,1]$ である. この対応は $(0,1] \times (0,1]$ から $(0,1]$ への単射を定める.

一方, $x \in (0,1]$ に対して $(x,x) \in (0,1] \times (0,1]$ を対応させると, これは $(0,1]$ から $(0,1] \times (0,1]$ への単射を定める.

よって, Bernstein の定理より, $(0,1] \times (0,1] \sim (0,1]$ である. 更に, 例 7.7 より, $\mathbf{R} \sim (0,1]$ だから, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \sim \mathbf{R}$ である.

例 8.2 において, (x,y) から z への対応は $(0,1] \times (0,1]$ から $(0,1]$ への単射を定めるが, 全射とはならない. なぜならば, 例えば,

$$z = 0.11010101\ldots$$

に対応する (x,y) は存在しないからである. $(0,1] \times (0,1]$ から $(0,1]$ への全単射は次に述べる Kőnig の記法を用いて定めることができる.

例 8.3 (Kőnig の記法) $x \in (0,1]$ を 10 進法により

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots$$

と無限小数に展開しておく. x_1, x_2, x_3, ... の中で 0 と異なるものを順に選び,

$$x_{n(1)},\ x_{n(2)},\ x_{n(3)},\ \ldots \quad (n(1) < n(2) < n(3) < \cdots)$$

とする. ここで,

$$\bar{x}_{k+1} = x_{n(k)+1}x_{n(k)+2}\cdots x_{n(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots,\ n(0) = 0)$$

とおくと,

$$x = 0.\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\ldots$$

と表される. これが Kőnig の記法である. 例えば,

$$x = 0.00908706005\ldots$$

のときは

$$\bar{x}_1 = 009, \quad \bar{x}_2 = 08, \quad \bar{x}_3 = 7, \quad \bar{x}_4 = 06, \quad \bar{x}_5 = 005, \quad \ldots$$

である.

Kőnig の記法を用いて, $x, y \in (0,1]$ を

$$x = 0.\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\ldots, \quad y = 0.\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3\ldots$$

と表しておく. このとき,

$$z = 0.\bar{x}_1\bar{y}_1\bar{x}_2\bar{y}_2\bar{x}_3\bar{y}_3\ldots$$

とおくと, $z \in (0,1]$ である. この対応は $(0,1] \times (0,1]$ から $(0,1]$ への全単射を定める.

更に, 2 つの集合の濃度を比較することを考えよう. X, Y を空でない集合とする. X から Y への単射は存在するが, $X \not\sim Y$ のとき, X は Y より濃度が小さい, または, Y は X より濃度が大きいという.

例 8.4 X を空でない集合とし, X から 2^X への写像 $f: X \to 2^X$ を

$$f(x) = \{x\} \quad (x \in X)$$

により定める. このとき, f は単射である.

一方, Cantor の定理より, X から 2^X への全射は存在しないから, $X \not\sim 2^X$ である.

よって, 2^X は X より濃度が大きい.

例 8.5 $U_1, U_2, U_3 \subset 2^{\mathbf{N}}$ を

$$U_1 = \{A \subset \mathbf{N} \,|\, A \text{ は有限集合}\}, \quad U_2 = \{A \subset \mathbf{N} \,|\, \mathbf{N} \setminus A \text{ は有限集合}\}, \quad U_3 = 2^{\mathbf{N}} \setminus (U_1 \cup U_2)$$

により定める. このとき,

$$2^{\mathbf{N}} = U_1 \cup U_2 \cup U_3$$

であり, U_1, U_2, U_3 は互いに素である.

まず, U_1 から $\mathbf{N}$ への写像 $f: U_1 \to \mathbf{N}$ を

$$f(A) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \chi_A(n) \quad (A \in U_1)$$

により定める. ただし, χ_A は問題 7.2 で述べた A の定義関数である. このとき, f は全単射となるから, U_1 は可算集合である.

次に, U_2 から U_1 への写像 $g: U_2 \to U_1$ を

$$g(A) = \mathbf{N} \setminus A \quad (A \in U_2)$$

により定める. このとき, g は全単射となるから, U_2 は可算集合である.

更に, U_1, U_2 は可算集合だから, $U_1 \cup U_2$ も可算集合である.

よって,

$$\begin{aligned} 2^{\mathbf{N}} &\sim U_1 \cup U_2 \cup U_3 \\ &\sim U_2 \cup U_3 \end{aligned}$$

である. ここで, $U_2 \cup U_3$ は $\mathbf{N}$ の無限部分集合全体である.

$U_2 \cup U_3$ から開区間 $(0,1]$ への写像 $h: U_2 \cup U_3 \to (0,1)$ を

$$h(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \chi_A(n) \quad (A \in U_2 \cup U_3)$$

により定める. このとき, h は全単射となるから,

$$\begin{aligned} U_2 \cup U_3 &\sim (0,1] \\ &\sim \mathbf{R} \end{aligned}$$

である.

したがって, $2^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$ である.

問題 8

1. X_1, X_2, X_3 を空でない集合とする. $X_1 \subset X_2 \subset X_3$ かつ $X_1 \sim X_3$ ならば, $X_1 \sim X_2$ かつ $X_2 \sim X_3$ であることを示せ.

2. X, Y を空でない集合とし, X から Y への写像全体の集合を $F(X, Y)$ と表すことにする.
(1) X, Y, X', Y' を空でない集合とする. $X \sim X'$ かつ $Y \sim Y'$ ならば,

$$F(X, Y) \sim F(X', Y')$$

であることを示せ.
(2) X, Y, Z を空でない集合とすると,

$$F(X \times Y, Z) \sim F(X, F(Y, Z))$$

であることを示せ.
(3) $F(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \sim \mathbf{R}$ を示せ.
(4) $F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \sim 2^{\mathbf{R}}$ を示せ.

3. $\mathbf{R}$ で定義された実数値連続関数全体の集合を $C(\mathbf{R})$ と表すことにする. $C(\mathbf{R}) \sim \mathbf{R}$ を示せ.

4. 無理数全体の集合と $\mathbf{R}$ は濃度が等しいことを示せ.

問題 8 の解答

1. $\iota_1 : X_1 \to X_2$, $\iota_2 : X_2 \to X_3$ をそれぞれ X_1 から X_2 および X_2 から X_3 への包含写像とする. $X_1 \sim X_3$ だから, X_3 から X_1 への全単射 $f : X_3 \to X_1$ が存在する.

まず, ι_1 は X_1 から X_2 への単射である. また, 合成写像 $f \circ \iota_2$ は X_2 から X_1 への単射である. よって, Bernstein の定理より, $X_1 \sim X_2$ である.

次に, ι_2 は X_2 から X_3 への単射である. また, 合成写像 $\iota_1 \circ f$ は X_3 から X_2 への単射である. よって, Bernstein の定理より, $X_2 \sim X_3$ である.

2. (1) $X \sim X'$ かつ $Y \sim Y'$ だから, X から X' および Y から Y' への全単射 $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ が存在する. ここで, $F(X,Y)$ から $F(X',Y')$ への写像 $\Phi : F(X,Y) \to F(X',Y')$ を

$$(\Phi(h))(x') = (g \circ h \circ f^{-1})(x') \quad (h \in F(X,Y),\ x' \in X')$$

により定める. このとき, Φ は全単射となるから,

$$F(A,B) \sim F(A',B')$$

である.

(2) $f \in F(X \times Y, Z)$ および $x \in X$ に対して,

$$f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$$

とおくと, $f_x \in F(Y,Z)$ となる. ここで, $F(X \times Y, Z)$ から $F(X, F(Y,Z))$ への写像 $\Psi : F(X \times Y, Z) \to F(X, F(Y,Z))$ を

$$(\Psi(f))(x) = f_x \quad (x \in X)$$

により定める. このとき, Ψ は全単射となるから,

$$F(X \times Y, Z) \sim F(X, F(Y,Z))$$

である.

(3) まず, 自然に

$$F(\mathbf{N}, \{0,1\}) \subset F(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \subset F(\mathbf{N}, \mathbf{R})$$

とみなすことができる. ここで,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{N}, \{0,1\}) &\sim 2^{\mathbf{N}} \\ &\sim \mathbf{R} \end{aligned}$$

である. また, (1), (2) より,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{N}, \mathbf{R}) &\sim F(\mathbf{N}, F(\mathbf{N}, \{0,1\})) \\ &\sim F(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \{0,1\}) \\ &\sim F(\mathbf{N}, \{0,1\}) \\ &\sim \mathbf{R} \end{aligned}$$

である. よって, $F(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \sim \mathbf{R}$ である.

(4) (1), (2) より,

$$\begin{aligned}F(\mathbf{R},\mathbf{R}) &\sim F(\mathbf{R},F(\mathbf{N},\{0,1\}))\\ &\sim F(\mathbf{R}\times\mathbf{N},\{0,1\})\\ &\sim F(\mathbf{R},\{0,1\})\\ &\sim 2^{\mathbf{R}}\end{aligned}$$

である. よって, $F(\mathbf{R},\mathbf{R})\sim 2^{\mathbf{R}}$ である.

3. まず, $f, g\in C(\mathbf{R})$ とする. f, g は連続だから, 任意の $x\in\mathbf{Q}$ に対して, $f(x)=g(x)$ ならば, $f=g$ である. よって, 定義域を $\mathbf{Q}$ に制限することにより, $C(\mathbf{R})$ から $F(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ への単射を定めることができる. ここで,

$$\begin{aligned}F(\mathbf{Q},\mathbf{R}) &\sim F(\mathbf{N},2^{\mathbf{N}})\\ &\sim F(\mathbf{N},F(\mathbf{N},\{0,1\}))\\ &\sim F(\mathbf{N}\times\mathbf{N},\{0,1\})\\ &\sim F(\mathbf{N},\{0,1\})\\ &\sim \mathbf{R}\end{aligned}$$

だから, $C(\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}$ への単射が存在する.

一方, 定数関数を考えると, $\mathbf{R}$ から $C(\mathbf{R})$ への単射が存在する.

したがって, Bernstein の定理より, $C(\mathbf{R})\sim\mathbf{R}$ である.

4. $\mathbf{Q}$ から $\mathbf{R}$ への包含写像は単射である. また, $\mathbf{Q}$ は可算集合であり, $\mathbf{R}$ は可算集合でないから, $\mathbf{R}$ は $\mathbf{Q}$ より濃度が大きい. よって, $x_0\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ が存在する. ここで, $A, B\subset\mathbf{R}$ を

$$A=\{rx_0\,|\,r\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}\},\quad B=\mathbf{R}\setminus(\mathbf{Q}\cup A)$$

により定める. このとき,

$$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup A\cup B$$

であり, $\mathbf{Q}$, A, B は互いに素である. 更に, $\mathbf{Q}$, A は可算集合だから, $\mathbf{Q}\cup A$ も可算集合である. したがって,

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &\sim \mathbf{Q}\cup A\cup B\\ &\sim A\cup B\end{aligned}$$

である. ここで, $A\cup B$ は無理数全体の集合である. 以上より, 無理数全体の集合と $\mathbf{R}$ は濃度が等しい.