§9. 二項関係

数学では１つの集合に含まれる２つの元がある関係をみたすかみたさないかを問題にすることが多い.

定義 9.1 X を空でない集合とする. $X \times X$ の任意の元に対して, みたすかみたさないかを判定できる規則 R があたえられているとする. このとき, R を X 上の二項関係という. $(x, y) \in X \times Y$ が R をみたすとき, xRy と表すことにする.

二項関係に関して, 次の４つの性質を考えることが多い.

定義 9.2 X を空でない集合, R を X 上の二項関係とし, $x, y, z \in X$ とする.
任意の x に対して, xRx となるとき, R は反射律をみたすという.
xRy ならば, yRx となるとき, R は対称律をみたすという.
xRy かつ yRz ならば, xRz となるとき, R は推移律をみたすという.
xRy かつ yRx ならば, $x = y$ となるとき, R は反対称律をみたすという.

二項関係の中でも重要な同値関係と順序関係について, 順に述べていこう.

定義 9.3 X を空でない集合, R を X 上の二項関係とする. R が反射律, 対称律, 推移律をみたすとき, R を同値関係という. R が同値関係のとき, xRy となる $x, y \in X$ に対して, x と y は同値であるという.

同値関係は R の代わりに $\sim$ という記号を用いることが多い.

例 9.1 (自明な同値関係) X を空でない集合とし, 任意の $x, y \in X$ に対して, $x \sim y$ であると定める. このとき, 明らかに $\sim$ は X 上の同値関係である. これを自明な同値関係という.

例 9.2 (相等関係) X を空でない集合とし, $x, y \in X$ に対して, $x = y$ のとき, $x \sim y$ であると定める. このとき, 明らかに $\sim$ は X 上の同値関係である. これを相等関係という.

例 9.3 (自然数を法とする合同関係) $n \in \mathbf{N}$ を固定しておき, $k, l \in \mathbf{Z}$ に対して, k と l が n を法として合同なとき, すなわち, $k - l$ が n で割り切れるとき, $k \sim l$ であると定める. なお, この場合は $k \sim l$ であることを

$$k \equiv l \mod n$$

等と表すことが多い. $\sim$ が $\mathbf{Z}$ 上の同値関係であることを示そう.
まず, $k \in \mathbf{Z}$ とする. このとき, $k - k = 0$ であり, 0 は n で割り切れるから, $k \sim k$ である. よって, $\sim$ は反射律をみたす.
次に, $k, l \in \mathbf{Z}$, $k \sim l$ とする. このとき, $k - l$ は n で割り切れる. よって,

$$l - k = -(k - l)$$

は n で割り切れるから, $l \sim k$ である. したがって, $\sim$ は対称律をみたす.
更に, $k, l, m \in \mathbf{Z}$, $k \sim l$, $l \sim m$ とする. このとき, $k - l$ および $l - m$ は n で割り切れる. ここで,

$$k - m = (k - l) + (l - m)$$

だから, $k - m$ は n で割り切れる. よって, $k \sim m$ である. したがって, $\sim$ は推移律をみたす.
以上より, $\sim$ は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係である.

次に, 順序関係について述べよう.

定義 9.4 X を空でない集合, R を X 上の二項関係とする. R が反射律, 反対称律, 推移律をみたすとき, R を順序関係という. R が順序関係のとき, 組 (X, R) を半順序集合または順序集合という. R がはっきりしている場合は (X, R) を単に X と表す.

(X, R) が順序集合であり, 任意の $x, y \in X$ に対して xRy または yRx となるとき, (X, R) を全順序集合という.

例 9.4 (大小関係) $X = \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ とおき, $x, y \in X$ に対して, $x \leq y$ のとき, xRy と定める. このとき, R は X 上の順序関係となる. これを大小関係という. 特に, (X, R) は全順序集合となる.

例 9.5 (包含関係) X を集合とし, $A, B \in 2^X$ に対して, $A \subset B$ のとき, ARB であると定める. このとき, R は 2^X 上の順序関係となる. これを包含関係という. 一般に $(2^X, R)$ は全順序集合ではない.

例 9.4 より, 順序関係は $\leq$ という記号を用いることが多い. このとき, $x \leq y$ を $y \geq x$ とも表す.

定義 9.5 $(X, \leq)$ を順序集合とし, $x, y \in X$ とする.

$x \leq y$ のとき, x は y 以下である, または, y は x 以上であるという.

$x \leq y$ かつ $x \neq y$ のとき, $x < y$ と表し, x は y より小さい, または, y は x より大きいという.

任意の $x' \in X$ に対して, $x' \leq x$ となるとき, $x = \max X$ と表し, x を X の最大元という.

任意の $x' \in X$ に対して, $x \leq x'$ となるとき, $x = \min X$ と表し, x を X の最小元という.

注意 9.1 定義 9.5 において, 反対称律より, 最大元, 最小元は存在するならば一意的であることが分かる.

更に, 次のように定める.

定義 9.6 $(X, \leq)$ を順序集合とし, $x, y \in X$ とする.

$x < x'$ となる $x' \in X$ が存在しないとき, x を X の極大元という.

$x' < x$ となる $x' \in X$ が存在しないとき, x を X の極小元という.

注意 9.2 定義 9.6 において, X の極大元は存在しても一意的とは限らないが, $\max X$ が存在するならば, それは X の一意的な極大元となる. 極小元についても同様である.

例 9.6 (整除関係) X を 2 以上の自然数全体の集合とし, $x, y \in X$ に対して, y が x で割り切れるとき, xRy であると定める. このとき, R は X 上の順序関係となる. これを整除関係という. なお, この場合は xRy であることを $x|y$ と表すことが多い.

X の最大元および極大元は存在しない. また, 任意の X の元を割り切る X の元は存在しないから, X の最小元は存在しない. しかし, 任意の素数は X の極小元である.

定義 9.7 $(X, \leq)$ を順序集合とし, $A \subset X$, $x \in X$ とする.

任意の $x' \in A$ に対して, $x' \leq x$ となるとき, x を A の X における上界という. A の上界が存在するとき, A は X において上に有界であるという. A の上界全体の集合が最小元をもつとき, その元を $\sup A$ と表し, A の X における上限という.

任意の $x' \in A$ に対して, $x \leq x'$ となるとき, x を A の X における下界という. A の下界が存在するとき, A は X において下に有界であるという. A の下界全体の集合が最大元をもつとき, その元を $\inf A$ と表し, A の X における下限という.

例 9.7 $\mathbf{R}$ 上の大小関係を考え, $a < b$ となる $a, b \in \mathbf{R}$ に対して, 左半開区間 $(a, b] \subset \mathbf{R}$ を考える. このとき,

$$\max(a, b] = \sup(a, b] = b$$

である. また, $\min(a,b]$ は存在しないが, $\inf(a,b]=a$ である.

例 9.8 $\mathbf{Q}$ 上の大小関係を考え,

$$A=\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x>0\text{ かつ }x^2>2\}$$

とおく. このとき, A の上界全体の集合は空集合だから, $\sup A$ は存在しない. また, A の下界全体の集合は

$$\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x<0\text{ または }x^2<2\}$$

である. しかし, $\inf A$ は存在しない. 更に, $\max A$ および $\min A$ は存在しない.

次の定理は実数の連続性という性質に他ならない.

定理 9.1 (Weierstrass の定理) A を $\mathbf{R}$ の空でない部分集合とする. A の上界が存在するならば, $\sup A$ が存在する. また, A の下界が存在するならば, $\inf A$ が存在する.

最後に, 順序同型について述べておこう.

定義 9.8 $(X,\leq)$, $(X',\leq')$ を順序集合とする.

$f:X\to X'$ を X から X' への写像とする. 任意の $x,y\in X$ に対して, $x\leq y$ ならば, $f(x)\leq' f(y)$ となるとき, f は順序を保つという.

全単射 $f:X\to X'$ が存在し, f と f^{-1} がともに順序を保つとき, f を順序同型写像という. また, $(X,\leq)$ と $(X',\leq')$ は順序同型であるという. このとき,

$$(X,\leq)\simeq(X',\leq')$$

と表すことにする.

順序同型に関して, 次がなりたつ.

定理 9.2 $(X,\leq)$, $(X',\leq')$, $(X'',\leq'')$ を順序集合とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.

(1) $(X,\leq)\simeq(X,\leq)$.
(2) $(X,\leq)\simeq(X',\leq')$ ならば, $(X',\leq')\simeq(X,\leq)$.
(3) $(X,\leq)\simeq(X',\leq')$ かつ $(X',\leq')\simeq(X'',\leq'')$ ならば, $(X,\leq)\simeq(X'',\leq'')$.

証明 (1): X 上の恒等写像 1_X が X から X への順序同型写像となる.
(2): 仮定より, 順序同型写像 $f:X\to X'$ が存在する. このとき, f の逆写像 $f^{-1}:X'\to X$ が X' から X への順序同型写像となることが分かる.
(3): 仮定より, 順序同型写像 $f:X\to X'$, $g:X'\to X''$ が存在する. このとき, f と g の合成写像 $g\circ f$ が X から X'' への順序同型写像となることが分かる. □

例 9.9 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ 上の大小関係を考える.

まず, $\mathbf{N}$ には最小元 1 が存在するが, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ の最小元は存在しない. よって, $\mathbf{N}$ は $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ と順序同型ではない.

次に, 0 と 1 の間に $\mathbf{Z}$ の元は存在しないが, $\mathbf{Q}$ の任意の 2 個の元の間に $\mathbf{Q}$ の元が存在する. よって, $\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Q}$ と順序同型ではない.

したがって, 大小関係に関して, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ は互いに順序同型ではない.

問題 9

1. $X = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ とおき, $(m, n), (m', n') \in X$ に対して, $mn' = nm'$ のとき, $(m, n) \sim (m', n')$ と定める. $\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ.

2. I を 0 を含む開区間, X を I で定義された正の値をとる関数全体の集合とし, $f, g \in X$ に対して,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

のとき, $f \sim g$ と定める. $\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ.

3. 実数を成分とする n 次の正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ と表すことにする. $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ に対して, $B = P^{-1}AP$ となる n 次の正則行列 P が存在するとき, $A \sim B$ と定める. なお, このとき A と B は相似であるという. $\sim$ は $M_n(\mathbf{R})$ 上の同値関係であることを示せ.

4. X を集合とし, 2^X 上の包含関係を考える. $f : 2^X \to 2^X$ を 2^X から 2^X への順序を保つ写像とすると, $f(A_0) = A_0$ となる $A_0 \in 2^X$ が存在することを示せ.

問題 9 の解答

1. まず, $(m,n) \in X$ とする．このとき, $mn = nm$ だから, $\sim$ の定義より, $(m,n) \sim (m,n)$ である．よって, $\sim$ は反射律をみたす.

次に, $(m,n),(m',n') \in X$, $(m,n) \sim (m',n')$ とする．このとき, $\sim$ の定義より, $mn' = nm'$ である．よって, $m'n = n'm$ だから, $\sim$ の定義より, $(m',n') \sim (m,n)$ である．したがって, $\sim$ は対称律をみたす.

更に, $(m,n),(m',n'),(m'',n'') \in X$, $(m,n) \sim (m',n')$, $(m',n') \sim (m'',n'')$ とする．このとき, $\sim$ の定義より,

$$mn' = nm', \quad m'n'' = n'm'' \tag{$*$}$$

である．$(*)$ の 2 式を掛けると,

$$mn'm'n'' = nm'n'm''$$

である．ここで, $n' \neq 0$ だから,

$$mm'n'' = nm'm''$$

である．$m' \neq 0$ のとき, $mn'' = nm''$ である．また, $m' = 0$ のとき, $(*)$ および $n' \neq 0$ より, $m = m'' = 0$ だから, $mn'' = nm''$ である．よって, $\sim$ の定義より, $(m,n) \sim (m'',n'')$ である．したがって, $\sim$ は推移律をみたす.

以上より, $\sim$ は X 上の同値関係である.

2. まず, $f \in X$ とする．このとき,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

だから, $\sim$ の定義より, $f \sim f$ である．よって, $\sim$ は反射律をみたす.

次に, $f, g \in X$, $f \sim g$ とする．このとき, $\sim$ の定義より,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

である．よって,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \\
&= \frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}} \\
&= \frac{1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

だから, $\sim$ の定義より, $g \sim f$ である．したがって, $\sim$ は対称律をみたす.

更に, $f, g, h \in X$, $f \sim g$, $g \sim h$ とする．このとき, $\sim$ の定義より,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$$

である．よって，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{h(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{h(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)}\\ &= 1\cdot 1\\ &= 1\end{aligned}$$

だから，$\sim$ の定義より，$f\sim h$ である．したがって，$\sim$ は推移律をみたす．
以上より，$\sim$ は X 上の同値関係である．

3. まず，$A\in M_n(\mathbf{R})$ とする．E を n 次単位行列とすると，E は正則であり，

$$A = E^{-1}AE$$

である．よって，$\sim$ の定義より，$A\sim A$ だから，$\sim$ は反射律をみたす．
次に，$A, B\in M_n(\mathbf{R})$，$A\sim B$ とする．このとき，$\sim$ の定義より，$B = P^{-1}AP$ となる n 次の正則行列 P が存在する．よって，P^{-1} は正則であり，

$$A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$$

である．したがって，$\sim$ の定義より，$B\sim A$ だから，$\sim$ は対称律をみたす．
更に，$A, B, C\in M_n(\mathbf{R})$，$A\sim B$，$B\sim C$ とする．このとき，$\sim$ の定義より，$B = P^{-1}AP$，$C = Q^{-1}BQ$ となる n 次の正則行列 P，Q が存在する．よって，PQ は正則であり，

$$\begin{aligned}C &= Q^{-1}(P^{-1}AP)Q\\ &= (PQ)^{-1}A(PQ)\end{aligned}$$

である．したがって，$\sim$ の定義より，$A\sim C$ だから，$\sim$ は推移律をみたす．
以上より，$\sim$ は $M_n(\mathbf{R})$ 上の同値関係である．

4. $\mathfrak{A}\subset 2^X$ を

$$\mathfrak{A} = \{A\subset X \mid f(A)\subset A\}$$

により定める．まず，$f(X)\subset X$ だから，$\mathfrak{A}\neq\emptyset$ である．ここで，

$$A_0 = \{x\in X \mid \text{任意の } A\in\mathfrak{A} \text{ に対して } x\in A\}$$

とおく．
定義より，$A\in\mathfrak{A}$ とすると，$A_0\subset A$ である．f は順序を保つ写像だから，

$$\begin{aligned}f(A_0) &\subset f(A)\\ &\subset A\end{aligned}$$

である．よって，$f(A_0)\subset A_0$ である．
また，f は順序を保つ写像だから，$f(f(A_0))\subset f(A_0)$，すなわち，$f(A_0)\in\mathfrak{A}$ である．したがって，$A_0\subset f(A_0)$ である．
以上より，$f(A_0) = A_0$ である．