§10. 商集合と well-definedness

同値関係のあたえられた集合から商集合という新たな集合を構成することができる. X を空でない集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき, $a \in X$ に対して, $C(a) \subset X$ を

$$C(a) = \{x \in X \mid a \sim x\}$$

により定める. $C(a)$ を $\sim$ による a の同値類, $C(a)$ の各元を $C(a)$ の代表元または代表という. $C(a)$ は $[a]$ 等と表すこともある. 同値類に関して, 次がなりたつ.

定理 10.1　X を空でない集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) 任意の $a \in X$ に対して, $a \in C(a)$ である. 特に, $C(a) \neq \emptyset$ である.
(2) $a, b \in X$ とすると, 次の (a)〜(c) は互いに同値である.

(a) $a \sim b$.
(b) $C(a) = C(b)$.
(c) $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$.

証明　(1): 反射律より, 明らかである.
(2): (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (a) の順に示す.
(a) $\Rightarrow$ (b): $C(a) \subset C(b)$ および $C(b) \subset C(a)$ を示せばよい. まず, $x \in C(a)$ とする. このとき, 同値類の定義より, $a \sim x$ である. また, 仮定および対称律より, $b \sim a$ である. よって, 推移律より, $b \sim x$ だから, 同値類の定義より, $x \in C(b)$ である. したがって, $C(a) \subset C(b)$ である. 次に, $x \in C(b)$ とする. このとき, 同値類の定義より, $b \sim x$ である. よって, 仮定および推移律より, $a \sim x$ だから, 同値類の定義より, $x \in C(a)$ である. したがって, $C(b) \subset C(a)$ である. 以上より, $C(a) = C(b)$ である.
(b) $\Rightarrow$ (c): 仮定および (1) より, 明らかである.
(c) $\Rightarrow$ (a): 仮定より, ある $c \in C(a) \cap C(b)$ が存在する. このとき, $c \in C(a)$ だから, 同値類の定義より, $a \sim c$ である. また, $c \in C(b)$ だから, 同値類の定義より, $b \sim c$ である. 更に, 対称律より, $c \sim b$ である. よって, 推移律より, $a \sim b$ である. □

X を空でない集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき, 定理 10.1 より, $\sim$ による同値類全体は X を互いに素な部分集合の和に分解する. そこで, $\sim$ による同値類全体の集合を $X/\sim$ と表し, $\sim$ による X の商集合という. このとき, X から $X/\sim$ への写像 $\pi: X \to X/\sim$ を

$$\pi(x) = C(x) \quad (x \in X)$$

により定める. π を自然な射影という. 明らかに, π は全射である.

例 10.1 (有理数)　有理数とは整数と 0 ではない整数の比として表される数である. すなわち, $r \in \mathbf{Q}$ とすると, ある $m \in \mathbf{Z}$ および $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ が存在し, $r = \dfrac{m}{n}$ である. ただし, $m, m' \in \mathbf{Z}$ および $n, n' \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ を用いて表される 2 つの有理数 $\dfrac{m}{n}$ と $\dfrac{m'}{n'}$ は等式 $mn' = nm'$ がなりたつとき, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ であると定める.

そこで, 問題 9.1 の同値関係 $\sim$ を思い出そう. すなわち, $X = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ とおき, (m, n), $(m', n') \in X$ に対して, $mn' = nm'$ のとき, $(m, n) \sim (m', n')$ と定めると, $\sim$ は X 上の同値関係となるのであった. このとき, $X/\sim$ は $\mathbf{Q}$ に他ならない. また, $(m, n) \in X$ に対して, $C((m, n))$

は $\dfrac{m}{n}$ と表す. 更に, $\mathbf{Q}$ の元の代表としては規約分数を選ぶことが多い.

例 10.2　例 9.1 の空でない集合 X 上の自明な同値関係 $\sim$ を考える. このとき, 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ は

$$\pi(x) = X \quad (x \in X)$$

により定められる. よって, $X/\sim = \{X\}$, すなわち, $X/\sim$ は 1 つの元のみからなる集合である. 集合 $\{X\}$ は X という 1 つの集合を元とする集合であることに注意しよう.

例 10.3　例 9.2 の空でない集合 X 上の相等関係 $\sim$ を考える. このとき, 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ は

$$\pi(x) = \{x\} \quad (x \in X)$$

により定められる. よって,

$$X/\sim = \{\{x\} \,|\, x \in X\}$$

であり, $X/\sim$ は π によって X 自身とみなすことができる.

例 10.4　例 9.3 の $\mathbf{Z}$ 上の $n \in \mathbf{N}$ を法とする合同関係 $\sim$ を考える. まず, 任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して, ある $q \in \mathbf{Z}$ および $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ が存在し,

$$k = qn + r$$

と表される. すなわち, q, r はそれぞれ k を n で割ったときの商, 余りである. このとき,

$$k \equiv r \mod n$$

だから, $\pi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/\sim$ を自然な射影とすると, $\pi(k) = C(r)$ である. よって,

$$\mathbf{Z}/\sim = \{C(0), C(1), C(2), \ldots, C(n-1)\},$$

すなわち, $\mathbf{Z}/\sim$ は n 個の元からなる集合である. 特に, $n = 2$ のとき, $\mathbf{Z}/\sim$ は偶数全体の集合と奇数全体の集合からなる.

数学では, すでに定められた概念から新たな概念を定める際に, 一旦別の概念を経由することがあるが, このときに別の概念が複数定まってしまうことがある. それにも関わらず, 最終的に定まる概念がきちんと 1 つに確定するとき, 定義は well-defined であるという.

例 10.5 (行列の階数)　A を $m \times n$ 行列とする. このとき, A は基本変形を何回か行うことにより,

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

という形に変形できるのであった. ただし, E_r は r 次の単位行列, $O_{k,l}$ は k 行 l 列の零行列を表す. r を A の階数という. r は基本変形の仕方に依存しないことが分かるから, 行列の階数の定義は well-defined である.

商集合に関する概念はしばしば代表を用いて定義されるが, このとき, その定義が代表の選び方に依存せず, well-defined であることを示す必要がある.

例 10.6 (有理数の和)　2 つの有理数 $\dfrac{k}{l}$, $\dfrac{m}{n}$ の和は

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn + lm}{ln}$$

により定められる．ただし，$k, m \in \mathbf{Z}$, $l, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ である．このことを問題 9.1 や例 10.1 の集合 $X = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ 上の同値関係 $\sim$ の言葉で表してみよう．

$C((k,l)), C((m,n)) \in X/\sim$ に対して，和 $C((k,l)) + C((m,n)) \in X/\sim$ を

$$C((k,l)) + C((m,n)) = C((kn + lm, ln))$$

により定める．ここで，$(k', l'), (m', n') \in X$, $(k,l) \sim (k',l')$, $(m,n) \sim (m',n')$ とする．このとき，$\sim$ の定義より，$kl' = lk'$, $mn' = nm'$ である．よって，

$$\begin{aligned}(kn+lm)(l'n') &= (kn)(l'n') + (lm)(l'n') \\ &= (kl')(nn') + (mn')(ll') \\ &= (lk')(nn') + (nm')(ll') \\ &= (k'n')(ln) + (l'm')(ln) \\ &= (k'n' + l'm')(ln),\end{aligned}$$

すなわち，

$$(kn+lm)(l'n') = (k'n' + l'm')(ln)$$

である．したがって，$\sim$ の定義より，

$$(kn + lm, ln) \sim (k'n' + l'm', l'n')$$

である．以上より，上で定めた和の定義は代表の選び方に依存せず，well-defined である．

例 10.7　例 9.3 や例 10.4 の $\mathbf{Z}$ 上の $n \in \mathbf{N}$ を法とする合同関係 $\sim$ を考える．$C(k), C(l) \in \mathbf{Z}/\sim$ とする．

まず，和 $C(k) + C(l) \in \mathbf{Z}/\sim$ を

$$C(k) + C(l) = C(k+l)$$

により定める．ここで，$k, l, p, q \in \mathbf{Z}$, $k \sim p$, $l \sim q$ とする．このとき，$\sim$ の定義より，$k-p$, $l-q$ は n で割り切れる．また，

$$(k+l) - (p+q) = (k-p) + (l-q)$$

である．よって，$(k+l) - (p+q)$ は n で割り切れるから，$(k+l) \sim (p+q)$ である．したがって，上で定めた和の定義は代表の選び方に依存せず，well-defined である．

次に，積 $C(k)C(l) \in \mathbf{Z}/\sim$ を

$$C(k)C(l) = C(kl)$$

により定める．ここで，$k, l, p, q \in \mathbf{Z}$, $k \sim p$, $l \sim q$ とする．このとき，$\sim$ の定義より，$k-p$, $l-q$ は n で割り切れる．また，

$$kl - pq = (k-p)l + (l-q)p$$

である．よって，$kl - pq$ は n で割り切れるから，$kl \sim pq$ である．したがって，上で定めた積の定義は代表の選び方に依存せず，well-defined である．

問題 10

1. V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間, W を V の部分空間とする. $x, y \in V$ に対して, $x - y \in W$ のとき, $x \sim y$ であると定める.

(1) $\sim$ は V 上の同値関係であることを示せ.

(2) $x, x', y, y' \in V$ とする. $x \sim x'$, $y \sim y'$ ならば, $x + y \sim x' + y'$ であることを示せ.

(3) $\sim$ による $x \in V$ の同値類を $[x]$ と表し, V の $\sim$ による商集合を V/W と表す. このとき, (2) より, $[x], [y] \in V/W$ $(x, y \in V)$ に対して, $[x]$ と $[y]$ の和 $[x] + [y] \in V/W$ を

$$[x] + [y] = [x + y]$$

により定めることができる. すなわち, 和の定義は well-defined である.

任意の $[x] \in V/W$ $(x \in V)$ に対して, 等式

$$[x] + [0] = [0] + [x] = [x]$$

がなりたつことを示せ.

(4) 任意の $[x] \in V/W$ $(x \in V)$ に対して, 等式

$$[x] + [-x] = [-x] + [x] = [0]$$

がなりたつことを示せ.

(5) $x, x' \in V$, $c \in \mathbf{R}$ とする. $x \sim x'$ ならば, $cx \sim cx'$ であることを示せ. 特に, $[x] \in V/W$ $(x \in V)$, $c \in \mathbf{R}$ に対して, $[x]$ の c によるスカラー倍 $c[x] \in V/W$ を

$$c[x] = [cx]$$

により定めることができる. すなわち, スカラー倍の定義は well-defined である. 更に, V/W は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となることが分かる. V/W を W による V の商ベクトル空間または商空間という.

(6) $W = \{0\}$ のとき, V/W はどのようなベクトル空間であるか調べよ.

(7) $W = V$ のとき, V/W はどのようなベクトル空間であるか調べよ.

(8) V が有限次元であり, $W \neq \{0\}, V$ とする. このとき, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ を W の基底とし, $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n \in V$ を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ が V の基底となるように選んでおく. $\{[v_{r+1}], [v_{r+2}], \ldots, [v_n]\}$ は V/W の基底であることを示せ. 特に, 等式

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

がなりたつ.

問題 10 の解答

1. (1) まず, $x \in V$ とする. W は V の部分空間だから,

$$x - x = 0 \in W,$$

すなわち, $x - x \in W$ である. よって, $x \sim x$ だから, $\sim$ は反射律をみたす.

次に, $x, y \in V$, $x \sim y$ とする. このとき, $x - y \in W$ であり, W は V の部分空間だから,

$$y - x = -(x - y) \in W,$$

すなわち, $y - x \in W$ である. よって, $y \sim x$ だから, $\sim$ は対称律をみたす.

更に, $x, y, z \in V$, $x \sim y$, $y \sim z$ とする. このとき, $x - y, y - z \in W$ であり, W は V の部分空間だから,

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in W,$$

すなわち, $x - z \in W$ である. よって, $x \sim z$ だから, $\sim$ は推移律をみたす.

したがって, $\sim$ は V 上の同値関係である.

(2) 仮定より, $x - x', y - y' \in W$ である. 更に, W は V の部分空間だから,

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in W,$$

すなわち, $(x + y) - (x' + y') \in W$ である. よって, $x + y \sim x' + y'$ である.

(3) 和の定義より,

$$\begin{aligned} [x] + [0] &= [x + 0] \\ &= [x], \end{aligned}$$

すなわち, 等式

$$[x] + [0] = [x]$$

がなりたつ. 同様に, 等式

$$[0] + [x] = [x]$$

がなりたつ. よって, 題意の等式がなりたつ.

(4) 和の定義より,

$$\begin{aligned} [x] + [-x] &= [x + (-x)] \\ &= [0], \end{aligned}$$

すなわち, 等式

$$[x] + [-x] = [0]$$

がなりたつ. 同様に, 等式

$$[-x] + [x] = [0]$$

がなりたつ. よって, 題意の等式がなりたつ.

(5) 仮定より, $x - x' \in W$ である. 更に, W は V の部分空間だから,

$$cx - cx' = c(x - x') \in W,$$

すなわち, $cx - cx' \in W$ である. よって, $cx \sim cx'$ である.

(6) $x, y \in V$ とする. $W = \{0\}$ のとき, $x \sim y$ となるのは $x - y = 0$ のとき, すなわち, $x = y$ のときである. よって, $\sim$ は V 上の相等関係であるから, 例 10.3 より, V/W は V 自身とみなすことができる.

(7) $W = V$ のとき, 任意の $x, y \in V$ に対して, $x - y \in W$, すなわち, $x \sim y$ である. よって, $\sim$ は V 上の自明な同値関係であるから, 例 10.2 より, V/W は 1 点のみからなる. したがって, V/W は零空間である.

(8) (3) より, V/W の零ベクトルは $[0]$ であることに注意する.

まず, $[v_{r+1}]$, $[v_{r+2}]$, $\ldots$, $[v_n]$ の 1 次関係

$$c_{r+1}[v_{r+1}] + c_{r+2}[v_{r+2}] + \cdots + c_n[v_n] = [0] \quad (c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n \in \mathbf{R})$$

を考える. このとき, V/W の和およびスカラー倍の定義より,

$$[c_{r+1}v_{r+1} + c_{r+2}v_{r+2} + \cdots + c_n v_n] = [0]$$

だから,

$$c_{r+1}v_{r+1} + c_{r+2}v_{r+2} + \cdots + c_n v_n \in W$$

である. 更に, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ は W の基底だから, ある $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$c_{r+1}v_{r+1} + c_{r+2}v_{r+2} + \cdots + c_n v_n = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_r v_r,$$

すなわち,

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_r v_r - c_{r+1}v_{r+1} - c_{r+2}v_{r+2} - \cdots - c_n v_n = 0$$

である. ここで, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ は V の基底だから,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

である. したがって, $[v_{r+1}]$, $[v_{r+2}]$, $\ldots$, $[v_n]$ は自明な 1 次関係しかもたない.

次に, $[x] \in V/W$ $(x \in V)$ とする. このとき, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ は V の基底だから, ある $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$x = d_1v_1 + d_2v_2 + \cdots + d_n v_n$$

である. ここで, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ は W の基底だから,

$$x - (d_{r+1}v_{r+1} + d_{r+2}v_{r+2} + \cdots + d_n v_n) = d_1v_1 + d_2v_2 + \cdots + d_r v_r \in W$$

である. よって,

$$x \sim d_{r+1}v_{r+1} + d_{r+2}v_{r+2} + \cdots + d_n v_n$$

だから, V/W の和およびスカラー倍の定義より,

$$[x] = d_{r+1}[v_{r+1}] + d_{r+2}[v_{r+2}] + \cdots + d_n[v_n]$$

である. したがって, V/W は $[v_{r+1}]$, $[v_{r+2}]$, $\ldots$, $[v_n]$ で生成される.

以上より, $\{[v_{r+1}], [v_{r+2}], \ldots, [v_n]\}$ は V/W の基底である.