§11. 整列集合

$\mathbf{N}$ 上の大小関係を考えよう．このとき, $\mathbf{N}$ の重要な性質として, 任意の空でない部分集合は最小元をもつことが挙げられる．証明は数学的帰納法を用いればよい．このような性質をもつ順序集合を考えよう．

定義 11.1　$(W, \leq)$ を順序集合とする．$(W, \leq)$ の任意の空でない部分集合が最小元をもつとき, W を整列集合という．

例 11.1　有限全順序集合は整列集合である．実際, 有限全順序集合は小さいものから順に１つづつ最後まで並べることができるからである．

例 11.2　$(W, \leq)$ を整列集合とする．

W が１つの元のみからなるとする．このとき, $(W, \leq)$ は明らかに全順序集合である．

W が２つ以上の元からなるとする．このとき, $x, y \in W$ とすると, $(W, \leq)$ は整列集合だから, W の部分集合 $\{x, y\}$ は最小元をもつ．$x = \min\{x, y\}$ のとき, $x \leq y$ である．また, $y = \min\{x, y\}$ のとき, $y \leq x$ である．よって, $(W, \leq)$ は全順序集合である．

したがって, 整列集合は全順序集合である．

例 11.3　最初に述べたように, $\mathbf{N}$ は大小関係に関して整列集合である．一方, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ は大小関係に関して整列集合ではない．

$(W, \leq)$ を整列集合とし, $a \in W$ とする．このとき, $W\langle a\rangle \subset W$ を

$$W\langle a\rangle = \{x \in W \mid x < a\}$$

により定め, $W\langle a\rangle$ を W の a による切片という．例えば, $a = \min W$ のときは $W\langle a\rangle = \emptyset$ である．

自然数に関する数学的帰納法は次の超限帰納法の特別な場合である．

定理 11.1 (超限帰納法)　$(W, \leq)$ を整列集合とする．各 $a \in W$ に対して, 命題 $P(a)$ があたえられ, 次の (1), (2) がなりたつと仮定する．

(1) $P(\min W)$ は真である．

(2) $\min W$ と異なる任意の $a \in W$ と任意の $b \in W\langle a\rangle$ に対して, $P(b)$ が真ならば, $P(a)$ は真である．

このとき, 任意の $a \in W$ に対して, $P(a)$ は真である．

証明　$A \subset W$ を

$$A = \{a \in W \mid P(a) \text{ は真ではない }\}$$

により定め, $A \neq \emptyset$ と仮定する．

まず, $(W, \leq)$ は整列集合だから, $\min A$ が存在する．ここで, (1) より, $\min A \neq \min W$ である．

次に, A の定義より, 任意の $b \in W\langle \min A\rangle$ に対して, $P(b)$ は真である．よって, (2) より, $P(\min A)$ は真である．これは矛盾である．

したがって, $A = \emptyset$, すなわち, 任意の $a \in W$ に対して, $P(a)$ は真である．　□

整列集合の比較定理を最後に示すために, 幾つか準備をしておこう．

定理 11.2　$(W, \leq)$ を整列集合, $f : W \to W$ を W から W への順序を保つ単射とする．このとき, 任意の $x \in W$ に対して, $x \leq f(x)$ である．

証明　$A \subset W$ を

$$A = \{x \in W \mid f(x) < x\}$$

により定め, $A \neq \emptyset$ と仮定する.

このとき, $(W, \leq)$ は整列集合だから, $\min A$ が存在する. A の定義より, $f(\min A) < \min A$ である. ここで, f は順序を保つ単射だから,

$$f(f(\min A)) < f(\min A)$$

である. よって, $f(\min A) \in A$ である. $f(\min A) < \min A$ だから, これは矛盾である.

したがって, $A = \emptyset$, すなわち, 任意の $x \in W$ に対して, $x \leq f(x)$ である. $\square$

$(X, \leq)$ を順序集合, A を X の空でない部分集合とすると, 自然に順序集合 $(A, \leq)$ を考えることができる. $(A, \leq)$ を $(X, \leq)$ の部分順序集合という.

定理 11.3 $(W, \leq)$ を整列集合とし, $a, b \in W$ とする. $a \neq b$ ならば, $(W\langle a\rangle, \leq)$ と $(W\langle b\rangle, \leq)$ は順序同型ではない.

証明 $a < b$ としてよい.

順序同型写像 $f : W\langle b\rangle \to W\langle a\rangle$ が存在すると仮定する. このとき,

$$W\langle b\rangle \simeq W\langle a\rangle \subset W\langle b\rangle$$

である. よって, $\iota : W\langle a\rangle \to W\langle b\rangle$ を包含写像とすると, 合成写像 $\iota \circ f$ は $W\langle b\rangle$ から $W\langle b\rangle$ 自身への順序を保つ単射であり, $(\iota \circ f)(a) < a$ である. 定理 11.2 より, これは矛盾である.

したがって, $(W\langle a\rangle, \leq)$ と $(W\langle b\rangle, \leq)$ は順序同型ではない. $\square$

定理 11.4 $(W, \leq), (W', \leq')$ を整列集合とし, $W_1 \subset W$ を

$$W_1 = \{a \in W \mid W\langle a\rangle \simeq W'\langle a'\rangle \text{ となる } a' \in W' \text{ が存在する }\}$$

により定める. このとき, $W_1 = W$ であるか, または $W_1 = W\langle a_1\rangle$ となる $a_1 \in W$ が一意的に存在する.

証明 $W_1 \neq W$ とする. このとき, $(W, \leq)$ は整列集合であり, $W \setminus W_1 \neq \emptyset$ だから, $\min(W \setminus W_1)$ が存在する. $\min(W \setminus W_1)$ の定義より,

$$W\langle\min(W \setminus W_1)\rangle \subset W_1$$

である. ここで, $\min(W \setminus W_1) < a$ となる $a \in W_1$ が存在すると仮定する.

W_1 の定義より, ある $a' \in W'$ および順序同型写像 $f : W\langle a\rangle \to W'\langle a'\rangle$ が存在する. このとき, f は $W\langle\min(W \setminus W_1)\rangle$ から $W'\langle f(\min(W \setminus W_1))\rangle$ への順序同型写像を定める. よって,

$$\min(W \setminus W_1) \in W_1$$

である. これは矛盾である. したがって,

$$W_1 \subset W\langle\min(W \setminus W_1)\rangle$$

である.

以上より,

$$W_1 = W\langle\min(W \setminus W_1)\rangle$$

だから, $a_1 = \min(W \setminus W_1)$ とおけばよい.

また, 定理 11.3 より, a_1 は一意的である. $\square$

それでは, 整列集合の比較定理を述べよう.

定理 11.5 (整列集合の比較定理)　$(W, \leq)$, $(W', \leq')$ を整列集合とすると, 次の (1)〜(3) の何れか 1 つのみがなりたつ.

(1) $W \simeq W'$.
(2) $W \simeq W'\langle a' \rangle$ となる $a' \in W'$ が存在する.
(3) $W\langle a \rangle \simeq W'$ となる $a \in W$ が存在する.

証明　$W_1 \subset W$ および $W_1' \subset W'$ をそれぞれ

$$W_1 = \{a \in W \,|\, W\langle a \rangle \simeq W'\langle a' \rangle \text{ となる } a' \in W' \text{ が存在する }\},$$
$$W_1' = \{a' \in W' \,|\, W\langle a \rangle \simeq W'\langle a' \rangle \text{ となる } a \in W \text{ が存在する }\}$$

により定める.

定理 11.3 より, 任意の $a \in W_1$ に対して, $W\langle a \rangle \simeq W'\langle a' \rangle$ となる $a' \in W'$ は一意的である. 更に, a に a' を対応させると, この対応は W_1 から W_1' への順序同型写像を定めることが分かる.

定理 11.4 より, $W_1 = W$ であるか, または $W_1 = W\langle a_1 \rangle$ となる $a_1 \in W$ が存在する. また, $W_1' = W'$ であるか, または $W_1' = W'\langle a_1' \rangle$ となる $a_1' \in W'$ が存在する.

まず, a_1, a_1' を改めてそれぞれ a, a' と表し, (1)〜(3) の何れかがなりたつことを示す. $W_1 = W\langle a \rangle$ かつ $W_1' = W'\langle a' \rangle$ と仮定する. $W_1 \simeq W_1'$ だから, $W\langle a \rangle \simeq W'\langle a' \rangle$ である. よって, $a \in W_1$ である. これは矛盾である. したがって, (1)〜(3) の何れかがなりたつ.

次に, (1), (2) が同時にはなりたたないことを示す. (1), (2) が同時になりたつと仮定する. このとき, $W \simeq W'$ であり, かつ $W \simeq W'\langle a' \rangle$ となる $a' \in W'$ が存在するから,

$$W' \simeq W \simeq W'\langle a' \rangle \subset W'$$

である. よって, $f(a') < a'$ となる W' から W' への順序を保つ単射 $f : W' \to W'$ が存在する. 定理 11.2 より, これは矛盾である. したがって, (1), (2) は同時にはなりたたない.

更に, (1), (3) が同時にはなりたたないことを示す. (1), (3) が同時になりたつと仮定する. このとき, $W \simeq W'$ であり, かつ $W\langle a \rangle \simeq W'$ となる $a \in W$ が存在するから,

$$W \simeq W' \simeq W\langle a \rangle \subset W$$

である. よって, $g(a) < a$ となる W から W への順序を保つ単射 $g : W \to W$ が存在する. 定理 11.2 より, これは矛盾である. したがって, (1), (3) は同時にはなりたたない.

最後に, (2), (3) が同時になりたたないことを示す. (2), (3) が同時になりたつと仮定する. このとき, $W \simeq W'\langle a' \rangle$ となる $a' \in W'$ が存在し, かつ $W\langle a \rangle \simeq W'$ となる $a \in W$ が存在するから,

$$W \simeq W'\langle a' \rangle \subset W' \simeq W\langle a \rangle \subset W$$

である. よって, $h(a) < a$ となる W から W への順序を保つ単射 $h : W \to W$ が存在する. 定理 11.2 より, これは矛盾である. したがって, (2), (3) は同時にはなりたたない.

以上より, (1)〜(3) の何れか 1 つのみがなりたつ. □

問題 11

1. $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする. n に関する数学的帰納法を用いることにより, de Moivre の公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

がなりたつことを示せ. ただし, i は虚数単位である.

2. $n = 0, 1, 2, \ldots$, $a \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$ とする. n に関する数学的帰納法を用いることにより, 等式

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\sin bx) = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

がなりたつことを示せ.

3. $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする. n に関する数学的帰納法を用いることにより, 等式

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

がなりたつことを示せ.

4. I を開区間とし, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ とする. n に関する数学的帰納法を用いることにより, 任意の $x \in I$ に対して

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$$

がなりたつならば,

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

であることを示せ.

5. $(W, \leq)$ を整列集合, $(X, \leq')$ を順序集合, $f : W \to X$ を W から X への順序を保つ写像とする. このとき, $(X, \leq')$ の部分順序集合 $(f(W), \leq')$ は整列集合であることを示せ.

6. $(W, \leq)$ を整列集合とし, $W' \subset W$ とする. このとき, W' は W または W のある切片と順序同型であることを示せ.

7. $(X, \leq)$ を順序集合とする. $a, b \in X$ に対して, $b \leq a$ のとき $a \leq^{-1} b$ と定めると, $\leq^{-1}$ は X の順序関係となる. なお, $\leq^{-1}$ を $\leq$ の双対順序, $(X, \leq^{-1})$ を $(X, \leq)$ の双対順序集合という.

$(W, \leq)$ を整列集合とし, $\mathbf{N}$ 上の大小関係を考える.

(1) W が無限集合ならば, $\mathbf{N}$ は W または W のある切片と順序同型であることを示せ.

(2) $(W, \leq^{-1})$ が整列集合ならば, W は有限集合であることを示せ.

問題 11 の解答

1. あたえられた等式を $(*)$ とおく．

$n=0$ のとき，$(*)$ はなりたつ．

$n=k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ のとき，$(*)$ がなりたつと仮定すると，加法定理より，

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)^k\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos k\theta+i\sin k\theta)\\&=(\cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta)+i(\sin\theta\cos k\theta+\cos\theta\sin k\theta)\\&=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

である．よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ はなりたつ．

したがって，$n=0,1,2,\ldots$ のとき，$(*)$ がなりたつ．

2. あたえられた等式を $(*)$ とおく．

$n=0$ のとき，$(*)$ はなりたつ．

$n=k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ のとき，$(*)$ がなりたつと仮定する．$\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ とおくと，加法定理より，

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(e^{ax}\sin bx)&=\frac{d}{dx}\frac{d^k}{dx^k}(e^{ax}\sin bx)\\&=\frac{d}{dx}\left\{(a^2+b^2)^{\frac{k}{2}}e^{ax}\sin(bx+k\theta)\right\}\\&=(a^2+b^2)^{\frac{k}{2}}\left\{ae^{ax}\sin(bx+k\theta)+e^{ax}b\cos(bx+k\theta)\right\}\\&=(a^2+b^2)^{\frac{k+1}{2}}e^{ax}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+k\theta)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+k\theta)\right\}\\&=(a^2+b^2)^{\frac{k+1}{2}}e^{ax}\left\{\cos\theta\sin(bx+k\theta)+\sin\theta\cos(bx+k\theta)\right\}\\&=(a^2+b^2)^{\frac{k+1}{2}}e^{ax}\sin(bx+(k+1)\theta)\end{aligned}$$

である．よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ はなりたつ．

したがって，$n=0,1,2,\ldots$ のとき，$(*)$ がなりたつ．

3. あたえられた等式を $(*)$ とおく．

$n=0$ のとき，$(*)$ はなりたつ．

$n=k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ のとき，$(*)$ がなりたつと仮定すると，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}^{k+1}&=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}^k\\&=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&\lambda^k\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1}+0&k\lambda^k+\lambda^k\\0+0&0+\lambda^{k+1}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1}&(k+1)\lambda^k\\0&\lambda^{k+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ はなりたつ．

したがって, $n = 0, 1, 2, \dots$ のとき, $(*)$ がなりたつ.

4. $n = 0$ のとき, 明らかに題意はなりたつ.

$n = k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ のとき, 題意がなりたつと仮定する. 更に, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{k+1} \in \mathbf{R}$ とし, 任意の $x \in I$ に対して,

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{k+1} x^{k+1} = 0 \tag{$*$}$$

がなりたつと仮定する. $(*)$ の両辺を x で微分すると,

$$c_1 + 2c_2 x + \cdots + (k+1)c_{k+1} x^k = 0$$

である. ここで, 帰納法の仮定より,

$$c_1 = 2c_2 = \cdots = (k+1)c_{k+1} = 0,$$

すなわち,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{k+1} = 0$$

である. $(*)$ より, $c_0 = 0$ である. よって, $n = k + 1$ のときも題意はなりたつ.

したがって, $n = 0, 1, 2, \dots$ のとき, 題意がなりたつ.

5. B を $f(W)$ の空でない部分集合とする. $f^{-1}(B)$ は W の空でない部分集合だから, $\min f^{-1}(B)$ が存在する. $a = \min f^{-1}(B)$ とおくと, $f(a) \in B$ である.

ここで, $y \in B$ とする. このとき, $f(x) = y$ となる $x \in f^{-1}(B)$ が存在する. a の定義より, $a \leq x$ である.

f は順序を保つ写像だから, $f(a) \leq' f(x)$. すなわち, $f(a) \leq' y$ である. よって, $f(a) = \min B$ である. したがって, $(f(W), \leq')$ は整列集合である.

6. $W \simeq W'\langle a' \rangle$ となる $a' \in W'$ が存在すると仮定する. このとき,

$$W \simeq W'\langle a \rangle \subset W' \subset W$$

である. よって, $f(a) < a$ となる W から W への順序を保つ単射 f が存在する. 定理 11.2 より, これは矛盾である. したがって, 整列集合の比較定理より, W' は W または W のある切片と順序同型である.

7. (1) $\mathbf{N}\langle n \rangle \simeq W$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在すると仮定する. このとき, $\mathbf{N}\langle n \rangle$ は $(n-1)$ 個の元からなる有限集合である. W は無限集合だから, これは矛盾である. よって, 整列集合の比較定理より, $\mathbf{N}$ は W または W のある切片と順序同型である.

(2) 背理法により示す.

W が無限集合であると仮定する. (1) より, $\mathbf{N}$ は順序関係 $\leq$ に関して W のある部分集合と順序同型である. よって, $\mathbf{N}$ の双対順序集合は順序関係 $\leq^{-1}$ に関して W のある部分集合と順序同型である.

ここで, $\mathbf{N}$ の双対順序集合は最小元をもたないから, 整列集合ではない. $(W, \leq^{-1})$ は整列集合だから, これは矛盾である.

したがって, W は有限集合である.