

§12. 選択公理

有限個の集合からそれぞれの元を一斉に選ぶことは可能であるが、選択公理とは集合の個数が無限個の場合もこのような操作を認めるものである。

定義 12.1 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を添字集合 Λ によって添字付けられた集合族とする。 Λ から $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ への写像 $f: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ で、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $f(\lambda) \in X_\lambda$ となるもの全体の集合を $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と表し、 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の直積という。また、各 X_λ を直積因子という。

注意 12.1 定義 12.1 において、 $\Lambda = \{1, 2\}$ のとき、 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は X_1 と X_2 の直積 $X_1 \times X_2$ と同一視できる。

$\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ のときは $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ または $\prod_{i=1}^n X_i$ とも表す。 $\Lambda = \mathbf{N}$ のときは $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ とも表す。

選択公理は次のように述べることができる。

公理 12.1 (選択公理) $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族とする。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $X_\lambda \neq \emptyset$ ならば、 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ である。

以下では、選択公理を認めよう。

定義 12.2 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $X_\lambda \neq \emptyset$ となる集合族とし、 $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とする。このとき、 f を $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数という。また、 $\lambda_0 \in \Lambda$ を固定したとき、 $f(\lambda_0)$ を f の λ_0 成分という。 f に $f(\lambda_0)$ を対応させることにより定まる $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ から X_{λ_0} への写像を p_{λ_0} と表すことにする。 p_{λ_0} を $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ から X_{λ_0} への射影という。

次の定理では証明に選択公理が用いられる。

定理 12.1 X, Y を空でない集合、 $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への写像とする。 f が全射となるための必要十分条件は $f \circ s = 1_Y$ となる Y から X への写像 $s: Y \rightarrow X$ が存在することである。

証明 まず、 f が全射であると仮定する。このとき、任意の $y \in Y$ に対して、 $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ である。よって、選択公理より、

$$s \in \prod_{b \in B} f^{-1}(b)$$

を選ぶことができる。 s は Y から X への写像を定め、任意の $b \in B$ に対して、 $s(b) \in f^{-1}(b)$ である。したがって、 $f(s(b)) = b$ 、すなわち、 $f \circ s = 1_Y$ である。

逆は容易である。 □

注意 12.2 定理 12.1 において、 f が全射ならば、 s は単射となることが分かる。よって、 $X \sim Y$ であるか、または X は Y より濃度が大きい。

X を空でない集合とする。このとき、選択公理より、

$$f \in \prod_{A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}} A$$

を選ぶことができる. よって, 任意の $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ に対して, $f(A) \in A$ である. これは X の空でない各部分集合から元を一斉に選ぶことができることを意味する. この f を X 上の選択関数という. この事実を用いて, 次を示そう.

定理 12.2 無限集合は可算部分集合を含む.

特に, 可算集合は無限集合の中で濃度が最も小さい.

証明 X を無限集合とする. このとき, $X \neq \emptyset$ である.

f を X 上の選択関数とし, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $x_n \in X$ を

$$\begin{cases} x_1 = f(X), \\ x_n = f(X \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

により定める.

ここで, $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$ とすると,

$$x_m = f(X \setminus \{x_1, \dots, x_{m-1}\}) \in X \setminus \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$$

である. 一方,

$$x_n \notin X \setminus \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$$

だから, $x_m \neq x_n$ である. よって, 集合 $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ は X の可算部分集合である. □

選択公理は数学の様々な場面で現れる重要なものである.

例 12.1 f を区間 I で定義された実数値関数とし, $a \in I$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値である.

- (1) f は a で連続である.
- (2) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \in I$ であり, かつ a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ に対して, 数列 $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束する.

(2) から (1) を導くには対偶を示せばよいが, その際に選択公理が用いられる. 証明に現れる添字集合は可算集合となるので, この場合の選択公理は可算選択公理ともいう.

選択公理は次の Zorn の補題および整列定理と同値である.

定理 12.3 (Zorn の補題) 任意の全順序部分集合が上界をもつような順序集合は極大元をもつ.

定理 12.4 (整列定理) 任意の空でない集合に順序関係を定めて整列集合にすることができる.

任意の全順序部分集合が上界をもつような順序集合は帰納的であるという. よって, Zorn の補題を言い替えると, 帰納的順序集合は極大元をもつということになる.

整列定理から選択公理を導くことは比較的容易である.

定理 12.5 選択公理, Zorn の補題, 整列定理は互いに同値である.

証明 整列定理から選択公理が導かれることのみ示す.

整列定理がなりたつと仮定する. $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を添字集合 Λ によって添字付けられた集合族とし, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $X_\lambda \neq \emptyset$ とする.

整列定理を用いて, 和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を整列集合にしておく. このとき, Λ から $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ への写像 $f: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を

$$f(\lambda) = \min X_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda)$$

により定めることができる. 定義より, $f(\lambda) \in X_\lambda$ だから, f は $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数である. よって, 選択公理がなりたつ. \square

最後に, 整列定理と §11 で述べた超限帰納法を用いて, 次を示そう.

定理 12.6 次の (1), (2) をみたす $H \subset \mathbf{R}$ が存在する.

(1) 異なる $x_1, x_2, \dots, x_m \in H$ および $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbf{Q}$ に対して,

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_mx_m = 0$$

ならば,

$$r_1 = r_2 = \dots = r_m = 0$$

である.

(2) 任意の $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ に対して,

$$x = r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n$$

となる $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ および $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{Q}$ が一意的に存在する.

証明 $W = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ とおく. 整列定理を用いて, W に順序関係 \leq を定めて整列集合にしておく. このとき, $H \subset \mathbf{R}$ を

$$H = \left\{ x \in W \mid \begin{array}{l} x = r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n \text{ となる } x_1, x_2, \dots, x_n \in \\ W \langle x \rangle \text{ および } r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{Q} \text{ は存在しない} \end{array} \right\}$$

により定める.

まず, H に対して, (1) の仮定の部分になりたつとする. このとき, W の順序関係 \leq に関して, $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ としてよい.

$r_m \neq 0$ と仮定すると,

$$x_m = -\frac{r_1}{r_m}x_1 - \frac{r_2}{r_m}x_2 - \dots - \frac{r_{m-1}}{r_m}x_{m-1}$$

である. H の定義より, これは矛盾である. よって, $r_m = 0$ である.

以下, 同様に,

$$r_1 = r_2 = \dots = r_{m-1} = 0$$

である. したがって, (1) がなりたつ.

次に, (2) がなりたつことを超限帰納法により示す.

(1) より, 一意性は容易である.

$x = a \in W$ のとき (2) がなりたつという命題を $P(a)$ とおく.

$a = \min W$ のとき, $\min W \in H$ だから, $P(a)$ は真である.

$b \in W \langle a \rangle$ のとき, $P(b)$ が真であると仮定する. $a \in H$ のとき, $P(a)$ は真である. $a \notin H$ のとき, H の定義および超限帰納法の仮定より, $P(a)$ は真である.

したがって, (2) がなりたつ. \square

定理 12.6 に現れた H を \mathbf{R} に対する Hamel の基底という. Hamel の基底はベクトル空間に対する基底の概念の特別な場合である. よって, 定理 12.6 の証明と同様に, 任意のベクトル空間が基底をもつことを示すことができる. 実は, 逆に任意のベクトル空間が基底をもつことから選択公理が導かれることが知られている.

問題 12

1. $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族とする.

(1) $\lambda_0 \in \Lambda$ とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $X_\lambda \neq \emptyset$ ならば, $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ から X_{λ_0} への射影 $p_{\lambda_0} :$

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow X_{\lambda_0}$ は全射であることを示せ.

(2) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, X_λ が少なくとも 2 つの元を含むならば, $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \sim \Lambda$ であるか, ま

たは $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は Λ より濃度が大きいことを示せ.

2. 任意の無限集合は濃度が等しい真部分集合を含むことを示せ.

3. \mathcal{J} を次の (1), (2) をみたす集合系とする.

(1) \mathcal{J} の元は开区間である.

(2) 任意の異なる $I, J \in \mathcal{J}$ に対して, $I \cap J = \emptyset$ である.

このとき, \mathcal{J} は高々可算集合であることを示せ.

4. (X, \leq) を順序集合とし, $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset X$ とする. $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ は

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$$

をみたすとき, X における降鎖という.

X が整列集合であるための必要十分条件は X における降鎖が存在しないことであることを示せ.

5. X, Y を空でない集合とする. 整列定理を用いることにより, 次の (1)~(3) の何れか 1 つのみがなりたつことを示せ.

(1) $X \sim Y$.

(2) X は Y より濃度が大きい.

(3) X は Y より濃度が小さい.

6. $x, y \in \mathbf{R}$ に対して, $x - y \in \mathbf{Q}$ のとき, $x \sim y$ と定める. このとき, \sim は \mathbf{R} 上の同値関係であることを示せ. なお, 上の同値関係と選択公理を用いることにより, Lebesgue 非可測集合という集合を構成することができる.

問題 12 の解答

1. (1) 選択公理より, $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を選ぶことができる. また, $a \in X_{\lambda_0}$ とする. このとき, $g \in$

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を

$$g(\mu) = \begin{cases} a & (\mu = \lambda_0), \\ f(\mu) & (\mu \in \Lambda, \mu \neq \lambda_0) \end{cases}$$

により定める. 定義より, $p_{\lambda_0}(g) = a$ である. よって, p_{λ_0} は全射である.

(2) 選択公理より, $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を選ぶことができる. 仮定より, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$X_\lambda \setminus \{f(\lambda)\} \neq \emptyset$$

だから, 選択公理より, $g \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \setminus \{f(\lambda)\}$ を選ぶことができる. このとき, Λ から $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$

への写像 $h: \Lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を

$$(h(\lambda))(\mu) = \begin{cases} f(\lambda) & (\mu = \lambda), \\ g(\lambda) & (\mu \neq \lambda) \end{cases}$$

により定める.

$\lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda'$ とすると,

$$\begin{aligned} (h(\lambda))(\lambda) &= f(\lambda) \\ &\neq g(\lambda) \\ &= h(\lambda')(\lambda), \end{aligned}$$

すなわち,

$$(h(\lambda))(\lambda) \neq h(\lambda')(\lambda)$$

である. よって, h は単射である. したがって, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \sim \Lambda$ であるか, または $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は Λ より濃度が大きい.

2. X を無限集合とする. このとき, X はある可算部分集合 $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ を含み,

$$X = (X \setminus \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}) \cup \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

である. ここで,

$$Y = (X \setminus \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}) \cup \{x_{2n} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

とおく. このとき, Y は X の真部分集合である. また, X から Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \in X \setminus \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}), \\ x_{2n} & (\text{ある } n \in \mathbf{N} \text{ に対して } x = x_n) \end{cases}$$

により定める. このとき, f は全単射である. よって, 任意の無限集合は濃度が等しい真部分集合を含む.

3. \mathbb{Q} の元となるある开区間に含まれる有理数全体の集合を X とおく. X は \mathbf{Q} の無限部分集合

となるから、可算集合である。ここで、 $r \in X$ とする。このとき、(2) より、 $r \in I$ となる $I \in \mathcal{I}$ は一意的に存在する。 X の定義より、 r から I への対応は X から \mathcal{I} への全射を定める。よって、 $X \sim \mathcal{I}$ であるか、または X は \mathcal{I} より濃度が大きい。したがって、 \mathcal{I} は高々可算集合である。

4. まず、 X における降鎖 $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ が存在すると仮定する。このとき、 $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ は最小元をもたない。よって、 X は整列集合ではない。

逆に、 X が整列集合ではないと仮定する。このとき、 X の空でない部分集合 A で、最小元をもたないものが存在する。よって、 $a \in A$ に対して、 $A_a \subset A$ を

$$A_a = \{x \in X \mid x < a\}$$

により定めると、 $A_a \neq \emptyset$ である。ここで、選択公理より、各 $a \in A$ に対して、 $f(a) \in A_a$ を選ぶことができる。 $a_1 \in A$ を1つ選んでおき、 X の部分集合 $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ を

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

により定める。このとき、 $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ は X における降鎖である。

5. 整列定理により、 X, Y を整列集合にしておく。このとき、整列集合の比較定理より、次の (a) ~ (c) の何れか1つのみがなりたつ。

- (a) $X \simeq Y$.
- (b) $X \simeq Y \langle b \rangle$ となる $b \in Y$ が存在する。
- (c) $X \langle a \rangle \simeq Y$ となる $a \in X$ が存在する。

(a) のとき、 $X \sim Y$ である。よって、(1) がなりたつ。

(b) のとき、 X から Y への単射が存在する。よって、(1) または (3) がなりたつ。

同様に、(c) のとき、(1) または (2) がなりたつ。

更に、Bernstein の定理より、(1) ~ (3) の何れか1つのみがなりたつ。

6. $x, y, z \in \mathbf{R}$ とする。

まず、

$$x - x = 0 \in \mathbf{Q}$$

である。よって、 $x \sim x$ だから、 \sim は反射律をみたす。

次に、 $x \sim y$ とする。このとき、 $x - y \in \mathbf{Q}$ だから、

$$y - x = -(x - y) \in \mathbf{Q}$$

である。よって、 $y \sim x$ だから、 \sim は対称律をみたす。

更に、 $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とする。このとき、 $x - y, y - z \in \mathbf{Q}$ だから、

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbf{Q}$$

である。よって、 $x \sim z$ だから、 \sim は推移律をみたす。

以上より、 \sim は \mathbf{R} 上の同値関係である。