§1. ベクトル空間

数学で扱われる集合は単なるものの集まりではなく, 何らかの構造を兼ね備えたものであることが多い. 例えば, 次に定めるようにベクトル空間とは和とスカラー倍という演算をもつ集合である.

定義 1.1　V を集合とし, $x, y, z \in V$, $c, d \in \mathbf{R}$ とする. V に和という演算 $x+y \in V$ およびスカラー倍という演算 $cx \in V$ が定められ, 次の (1)〜(8) をみたすとき, V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間または線形空間という. また, V の元をベクトルともいう.

(1) $x+y=y+x$. (和の交換律)

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$. (和の結合律)

(3) ある $0 \in V$ が存在し, 任意の x に対して, $x+0=0+x=x$ がなりたつ.

(4) $c(dx)=(cd)x$. (スカラー倍の結合律)

(5) $(c+d)x=cx+dx$. (分配律)

(6) $c(x+y)=cx+cy$. (分配律)

(7) $1x=x$.

(8) $0x=0$.

(3) の 0 を零ベクトルという.

注意 1.1　定義 1.1 において, (2) より, $(x+y)+z$ および $x+(y+z)$ は, 通常の数の足し算と同様に, ともに $x+y+z$ と書いても構わない. また, (7), (8) の左辺の 1, 0 はそれぞれ実数の 1, 0 である.

以下では, 特に断らない限り, $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間を考え, 単にベクトル空間ということにする.

ベクトル空間の例について考えよう.

例 1.1 (数ベクトル空間)　まず, 2 つの集合の直積を一般化し, 有限個の集合の直積を考えることができる. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を集合とする. このとき, $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$ の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 全体からなる集合を $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ と表し, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の直積という. すなわち,

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ \ldots,\ x_n \in X_n\}$$

である. ただし, 上の組は順序も込みで考えたものであり, $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1', x_2', \ldots, x_n') \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ に対して, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ となるのは $x_1 = x_1', x_2 = x_2', \ldots, x_n = x_n'$ のときであるとする. また, X を集合とするとき, X の n 個の直積は単に X^n とも表す.

さて, $\mathbf{R}$ の n 個の直積 $\mathbf{R}^n$ を考えよう. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

である. $\mathbf{R}^1$ は $\mathbf{R}$ のことである. また, $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ はそれぞれ直線, 平面, 空間とみなすことが多い. ここで,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \quad c \in \mathbf{R}$$

に対して, $\mathbf{R}$ における和と積を用いて, $x+y,\ cx \in \mathbf{R}^n$ を

$$x+y=(x_1+y_1,\, x_2+y_2,\, \ldots,\, x_n+y_n), \quad cx=(cx_1,\, cx_2,\, \ldots,\, cx_n)$$

により定める. このとき, $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間となる. ベクトル空間としての $\mathbf{R}^n$ を数ベクトル空間, $\mathbf{R}^n$ の元を n 次の行ベクトルまたは横ベクトルという. また, $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$ に対して, 上の x_i を x の第 i 成分という.

なお, $\mathbf{R}^n$ は

$$\mathbf{R}^n=\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle|\ x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

と表すこともある. この場合は, $\mathbf{R}^n$ の元を列ベクトルまたは縦ベクトルという. また, 行ベクトルと列ベクトルを合わせて数ベクトルという.

問 1.1 次の問に答えよ.
(1) 例 1.1 において, $\mathbf{R}^n$ が定義 1.1 の (1), (2) の条件をみたすことを示せ.
(2) 例 1.1 において, $\mathbf{R}^n$ が定義 1.1 の (3), (7), (8) の条件をみたすことを示せ.
(3) 例 1.1 において, $\mathbf{R}^n$ が定義 1.1 の (4), (5), (6) の条件をみたすことを示せ.

次のようなものもベクトル空間である.

例 1.2 (零空間) 定義 1.1 の (3) の条件より, ベクトル空間は零ベクトルを元として必ず含むが, 逆に, 零ベクトルのみからなるベクトル空間 $\{0\}$ を考えることができる. 実際, 和やスカラー倍はすべて零ベクトルになると定めればよい. ベクトル空間 $\{0\}$ を零空間という.

数列や関数からなるベクトル空間を考えることもできる.

例 1.3 実数列全体の集合を Σ と表すことにする. このとき, $\{a_n\},\ \{b_n\} \in \Sigma,\ c \in \mathbf{R}$ に対して, $\{a_n\}+\{b_n\},\ c\{a_n\} \in \Sigma$ を

$$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}, \quad c\{a_n\}=\{ca_n\}$$

により定めることにより, Σ はベクトル空間となる.

問 1.2 次の問に答えよ.
(1) 例 1.3 において, Σ が定義 1.1 の (1), (2) の条件をみたすことを示せ.
(2) 例 1.3 において, Σ が定義 1.1 の (3), (7), (8) の条件をみたすことを示せ.
(3) 例 1.3 において, Σ が定義 1.1 の (4), (5), (6) の条件をみたすことを示せ.

例 1.4 $A \subset \mathbf{R}$ を空でない集合とし, A で連続な実数値関数全体の集合を $C(A)$ と表す. すなわち,

$$C(A)=\{ f: A \to \mathbf{R} \mid f \text{ は } A \text{ で連続 } \}$$

である. このとき, $f,\, g \in C(A),\ c \in \mathbf{R}$ とすると, $f+g,\ cf \in C(A)$ となることが分かる. 更に, $C(A)$ はベクトル空間となる.

問 1.3 次の問に答えよ.
(1) 例 1.4 において, $C(A)$ が定義 1.1 の (1), (2) の条件をみたすことを示せ.
(2) 例 1.4 において, $C(A)$ が定義 1.1 の (3), (7), (8) の条件をみたすことを示せ.
(3) 例 1.4 において, $C(A)$ が定義 1.1 の (4), (5), (6) の条件をみたすことを示せ.

ベクトル空間の定義から導かれる基本的な事実をいくつか述べておこう.

定理 1.1 ベクトル空間の零ベクトルは一意的である.

証明 V をベクトル空間とし, $0, 0'$ をともに V の零ベクトルとする. このとき,

$$\begin{aligned} 0' &= 0' + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. ただし, 1 つめの等号では 0 を零ベクトルとみなし, 2 つめの等号では $0'$ を零ベクトルとみなし, 定義 1.1 の (3) の条件を用いた. よって, $0 = 0'$ となるから, 零ベクトルは一意的である. □

V をベクトル空間とし, $x \in V$ とする. このとき, $x + x' = 0$ をみたす $x' \in V$ を x の逆ベクトルという. 逆ベクトルに関して, 次がなりたつ.

定理 1.2 V をベクトル空間とする. 任意の $x \in V$ に対して, x の逆ベクトルが一意的に存在する.

証明 x の逆ベクトル x' が存在することのみ示す.
ベクトル空間の定義より,

$$\begin{aligned} x + (-1)x &= 1x + (-1)x \\ &= \{1 + (-1)\}x \\ &= 0x \\ &= 0, \end{aligned}$$

すなわち,

$$x + (-1)x = 0$$

である. よって, $(-1)x$ は x の逆ベクトルである. □

問 1.4 定理 1.2 において, 逆ベクトルの一意性を示せ.

注意 1.2 通常の数の演算の場合と同様に, ベクトル x の逆ベクトルを $-x$ と表す. 更に, $x+(-y)$ を $x - y$ と表す.

問 1.5 V を定義 1.1 において, (8) を除く (1)〜(7) の条件をみたすような和とスカラー倍の定められた集合とする. V が次の (8)' をみたすならば, V は定義 1.1 の (8) の条件をみたすことを示せ.

(8)' 任意の $x \in V$ に対して, $x + x' = 0$ をみたす $x' \in V$ が存在する.

すなわち, 定義 1.1 において, (8) の条件は逆ベクトルが存在することに置き換えてもよい.

問 1.6 V をベクトル空間, 0 を V の零ベクトルとする. このとき, 任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して, $c0 = 0$ であることを示せ.

ベクトル空間の部分集合を考える際には, 単なる部分集合ではなく, 次に定めるようなそれ自身がベクトル空間となるようなものを考えることが多い.

定義 1.2 V をベクトル空間, W を V の部分集合とする. W が V の和およびスカラー倍により, ベクトル空間となるとき, W を V の部分空間という.

ベクトル空間の部分集合が部分空間となるためには, 定義 1.1 の (1)〜(8) の条件をすべてみたさなければならないが, 実は, 次の定理の 3 つの条件のみからこれらすべての条件を導くことができる.

定理 1.3 V をベクトル空間, W を V の部分集合とする. W が V の部分空間であることと, 次の (1)〜(3) がなりたつことは同値である.

(1) $0 \in W$.

(2) $x,\, y \in W$ ならば, $x + y \in W$.

(3) $c \in \mathbf{R}$, $x \in W$ ならば, $cx \in W$.

問 1.7 定理 1.3 を示せ.

問 1.8 定理 1.3 において, (1) の条件は次の (1)' に置き換えてもよいことを示せ.

(1)' W は空ではない.

部分空間の例について考えよう. まず, ベクトル空間には 2 種類の自明な部分空間が存在する.

例 1.5 V をベクトル空間とする. このとき, V 自身および零空間 $\{0\}$ は V の部分集合であり, V の和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. よって, V および $\{0\}$ はともに V の部分空間である.

問 1.9 Σ を例 1.3 で定めた実数列全体からなるベクトル空間とし, $p,\, q \in \mathbf{R}$ とする. このとき, Σ の部分集合 $\Sigma(p,q)$ を

$$\Sigma(p,q) = \{\{a_n\} \in \Sigma \,|\, a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \ (n \in \mathbf{N})\}$$

により定める. $\Sigma(p,q)$ は Σ の部分空間であることを示せ.

問 1.10 I を開区間, 無限開区間, $\mathbf{R}$ の何れかであるとし, $C(I)$ を I で連続な実数値関数全体からなるベクトル空間とする. また, 集合 $C^1(I)$ を

$$C^1(I) = \{f : I \to \mathbf{R} \,|\, f \text{ は } I \text{ で微分可能であり, } f' \text{ は } I \text{ で連続 }\}$$

により定める. すなわち, $C^1(I)$ は I で連続微分可能な実数値関数全体の集合である. $C^1(I)$ は $C(I)$ の部分空間であることを示せ.

問 1.11 V をベクトル空間, $W_1,\, W_2$ を V の部分空間とする.
(1) $W_1 \cap W_2$ は V の部分空間であることを示せ.
(2) $W_1 + W_2 \subset V$ を

$$W_1 + W_2 = \{x + y \,|\, x \in W_1,\ y \in W_2\}$$

により定める. このとき, $W_1 + W_2$ は V の部分空間であることを示せ. $W_1 + W_2$ を W_1 と W_2 の和空間という.
(3) $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間ならば, $W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ であることを示せ.

問 1.12 $\mathbf{R}^2$ の部分集合 W を次の (1)〜(3) のように定める. W は $\mathbf{R}^2$ の部分空間ではないことを示せ.

(1) $W = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x_2 = x_1 + 1\}$.

(2) $W = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x_1 x_2 = 0\}$.

(3) $W = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0\}$.