§12. 余因子展開

行列式を計算する際には, §11 で述べた行列式の性質の他に, ここで述べる余因子展開も用いられる. まず, 余因子の定義から始めよう.

定義 12.1　$n = 2, 3, 4, \ldots$ とし, $A = (a_{ij})$ を n 次行列とする. A の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを $\tilde{a}_{ij}$ と表し, A の (i,j) 余因子という.

例 12.1　2 次行列 $A = (a_{ij})$ について, $(1,1)$ 余因子, $(1,2)$ 余因子は

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= (-1)^{1+1}|a_{22}| \\ &= a_{22}, \\ \tilde{a}_{12} &= (-1)^{1+2}|a_{21}| \\ &= -a_{21}\end{aligned}$$

である.

問 12.1　3 次行列 $A = (a_{ij})$ について, $(1,1)$ 余因子, $(1,2)$ 余因子, $(2,2)$ 余因子を求めよ.

§11 で述べた行列式の性質を用いることにより, 次の余因子展開がなりたつことが分かる. 余因子展開を用いることにより, 行列式の計算はよりサイズの小さい正方行列の行列式の計算に帰着させることができる. なお, 余因子展開は Laplace 展開ともいう. 以下では, 特に断らなくとも，余因子を考える正方行列は 2 次以上であるとする.

定理 12.1　$A = (a_{ij})$ を n 次行列とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $i = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}. \quad (\text{第 } i \text{ 行に関する余因子展開})$$

(2) $j = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}. \quad (\text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開})$$

例 12.2　第 2 行に関する余因子展開より,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{22}\tilde{a}_{22} \\ &= a_{21} \cdot (-1)^{2+1}|a_{12}| + a_{22} \cdot (-1)^{2+2}|a_{11}| \\ &= -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

である.

問 12.2　第 3 列に関する余因子展開を用いることにより, 3 次行列 $A = (a_{ij})$ の行列式を計算せよ.

A を n 次行列とする. (i,j) 成分が A の (j,i) 余因子の n 次行列を $\tilde{A}$ と表し, A の余因子行列という. 余因子の添え字の順序が (i,j) ではなく (j,i) であることに注意しよう.

例 12.3　3 次行列 $A = (a_{ij})$ に対して,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

である.

余因子展開より, 次がなりたつ.

定理 12.2 A を n 次行列とすると, 等式

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$$

がなりたつ. 特に, $|A| \neq 0$ ならば, A は正則であり,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

である.

問 11.10 および定理 12.2 より, 次がなりたつ.

定理 12.3 正方行列について, 正則であることと行列式が 0 でないことは同値である.

問 12.3 $A = (a_{ij})$ を正則な 2 次行列とする. 定理 12.2 を用いることにより, A の逆行列を求めよ.

問 12.4 定理 12.2 を用いることにより, 定理 8.3 を示せ.

問 12.5 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 100 & 99 & 99 & 99 \\ 100 & 99 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 99 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 99 \end{vmatrix}$.

問 12.6 A を n 次行列とする.
(1) $|A| = 0$ のとき, $|\tilde{A}| = 0$ であることを示せ.
(2) $|A| \neq 0$ のとき, 等式

$$|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$$

がなりたつことを示せ.

問 12.7 4 次行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

により定める.
(1) 問 11.8 を用いることにより, A の行列式を求めよ.
(2) 第 1 行に関する余因子展開を用いることにより, A の行列式を求めよ.

問 12.8 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$.

問 12.9　数学的帰納法を用いることにより, 次の等式を示せ.

(1) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1.$

問 12.10　等式

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & a & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & a & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a + b_1 + b_2 + \cdots + b_n)(a - b_1)(a - b_2)\cdots(a - b_n)$$

がなりたつことを示せ.

問 12.11　$A = (a_{ij})$ を偶数次の交代行列とすると, $|A|$ は a_{ij} の多項式 P を用いて,

$$|A| = P^2$$

と表されることが分かる.

(1) 2 次の交代行列の行列式を直接計算することにより, 上の事実を確かめよ.

(2) 4 次の交代行列の行列式を直接計算することにより, 上の事実を確かめよ.

問 12.12 次の問に答えよ.

(1) $n = 2, 3, 4, \ldots$ とすると, 等式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

がなりたつことを数学的帰納法により示せ. なお, この行列式を Vandermonde の行列式という. また, 上の式の右辺を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の差積という.

(2) 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix}$$

を Sarrus の方法と (1) を用いる方法の 2 通りで計算せよ.

(3) 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

を計算せよ.

(4) $n = 2, 3, 4, \ldots$ とし,

$$y_i = x_1^i + x_2^i + \cdots + x_n^i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, 2n-2)$$

とおく. このとき, 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n-1} & y_n & y_{n+1} & \cdots & y_{2n-2} \end{pmatrix}$$

により定める. $|A|$ を計算せよ.

(5) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$ を互いに異なる n 個の点とする. このとき,

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

をみたす $(n-1)$ 次以下の多項式 f が一意的に存在することを示せ.