

§5. 複素数

複素数は2次の実行列を用いて表すことができる. そのことについて述べる前に, まず通常の複素数の定義から始めよう. 複素数全体の集合 \mathbf{C} は

$$\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$$

と表される. ただし, i は虚数単位である. $a \in \mathbf{R}$ に対して, 複素数 $a + 0i$ は単に a とも表す. また, $z = a + bi \in \mathbf{C}$ ($a, b \in \mathbf{R}$) に対して,

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b$$

とおき, これらをそれぞれ z の実部, 虚部という. そして, $z, w \in \mathbf{C}$ に対して,

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$$

がなりたつとき, $z = w$ と表し, z と w は等しいという.

問 5.1 $z \in \mathbf{C}$ の実部, 虚部をそれぞれ $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ と表す理由を述べよ.

\mathbf{R} における和および積と等式

$$i^2 = -1$$

を用いることにより, $z, w \in \mathbf{C}$ に対して, 和 $z + w \in \mathbf{C}$ および積 $zw \in \mathbf{C}$ を定めることができる. すなわち, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ とすると,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

である. このとき, \mathbf{C} はベクトル空間となることが分かる. ただし, \mathbf{C} におけるスカラー倍とは複素数倍のことであり, 正確には \mathbf{C} は \mathbf{C} 上のベクトル空間である.

問 5.2 次の問に答えよ.

- (1) \mathbf{C} が定義 1.1 の (1), (2) の条件をみたすことを示せ.
- (2) \mathbf{C} が定義 1.1 の (3), (7), (8) の条件をみたすことを示せ.
- (3) \mathbf{C} が定義 1.1 の (4), (5), (6) の条件をみたすことを示せ.

また, 積については次がなりたつ.

定理 5.1 $z, w, v \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1)~(3) がなりたつ.

- (1) $zw = wz$. (積の交換律)
- (2) $(zw)v = z(wv)$. (積の結合律)
- (3) $z \neq 0$ とすると, $zz^{-1} = 1$ となる $z^{-1} \in \mathbf{C}$ が一意的に存在する.

証明 (1)のみ示す.

$z = a + bi, w = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) と表しておく. \mathbf{C} における積の定義より,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (a + bi)(c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

である. また, \mathbf{R} における和および積の交換律より,

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (c + di)(a + bi) \\ &= (ca - db) + (cb + da)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

である. よって, (1) がなりたつ. □

定理 5.1 の (3) における z^{-1} を乗法に関する z の逆元という. また, 積の結合律より, $(zw)v$ および $z(wv)$ はともに zvw と書いても構わない.

問 5.3 次の問に答えよ.

- (1) 定理 5.1 の (2) を示せ.
- (2) 定理 5.1 の (3) を示せ.

\mathbf{R} と同様に, \mathbf{C} においても商を考えることができる. $z, w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$ とする. まず, 定理 5.1 の (3) より, $w^{-1} \in \mathbf{C}$ が一意的に存在する. 更に, 定理 5.1 の (1) より,

$$zw^{-1} = w^{-1}z$$

である. よって, z の w による商 $\frac{z}{w} \in \mathbf{C}$ を

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}$$

により定めることができる.

問 5.4 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $c \in \mathbf{R}$ のとき, $\frac{z-c}{z+c}$ の実部, 虚部を求めよ.

実数を係数とする 1 変数の代数方程式の解は必ずしも実数の解をもつとは限らない. しかし, 数の範囲を複素数にまで広げると, 次がなりたつことが知られている.

定理 5.2 (代数学の基本定理) 複素数を係数とする 1 変数の代数方程式は少なくとも 1 つの複素数の解をもつ.

問 5.5 実数を係数とする 1 変数の代数方程式の定義を述べよ.

問 5.6 次の方程式をみたす複素数 z を求めよ.

- (1) $z^4 + 1 = 0$.
- (2) $z^2 = 1 + i$.

$z = a + bi \in \mathbf{C}$ ($a, b \in \mathbf{R}$) に対して, $\bar{z} \in \mathbf{C}$ を

$$\bar{z} = a - bi$$

により定める. \bar{z} を z の共役複素数という. 共役複素数に関して, 次がなりたつ.

定理 5.3 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1)~(5) がなりたつ.

- (1) $\bar{\bar{z}} = z$.
- (2) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- (3) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ (複号同順).
- (4) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.
- (5) $w \neq 0$ のとき, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

証明 (1) のみ示す.

$z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) と表しておく,

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \overline{a + bi} \\
 &= \overline{a - bi} \\
 &= a + bi \\
 &= \text{右辺}
 \end{aligned}$$

である。よって、(1) がなりたつ。 □

問 5.7 次の問に答えよ。

- (1) 定理 5.3 の (2) を示せ。
- (2) 定理 5.3 の (3) を示せ。
- (3) 定理 5.3 の (4) を示せ。
- (4) 定理 5.3 の (5) を示せ。

$z = a + bi \in \mathbf{C}$ とすると、

$$\begin{aligned}
 z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\
 &= a^2 + b^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

である。よって、0 以上の実数 $|z|$ を

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

により定めることができる。特に、 $|z| = 0$ となるのは $z = 0$ のときに限る。 $|z|$ を z の絶対値という。絶対値に関して、次がなりたつ。

定理 5.4 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると、次の (1), (2) がなりたつ。

- (1) $|zw| = |z||w|$.
- (2) $w \neq 0$ のとき、 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

問 5.8 次の問に答えよ。

- (1) 定理 5.4 の (1) を示せ。
- (2) 定理 5.4 の (2) を示せ。

更に、次がなりたつ。

定理 5.5 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると、次の (1)~(3) がなりたつ。

- (1) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re} z\bar{w}$.
- (2) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. (中線定理)
- (3) $|z + w| \leq |z| + |w|$. (三角不等式)

問 5.9 次の問に答えよ。

- (1) 定理 5.5 の (1) を示せ。
- (2) 定理 5.5 の (2) を示せ。
- (3) 定理 5.5 の (3) を示せ。

\mathbf{C} から \mathbf{R}^2 への写像 $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}^2$ を

$$f(a + bi) = (a, b) \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

により定める. f は全単射となるから, f によって, \mathbf{C} を平面 \mathbf{R}^2 とみなすことができる. このとき, \mathbf{C} を複素数平面ともいう.

O を複素数平面 \mathbf{C} の原点とし, $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して, z の表す点を P とすると, $|z|$ は線分 OP の長さでもある. よって, $r = OP$ とおき, 平面ベクトル $(1, 0)$ と \overrightarrow{OP} のなす角を θ とすると,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表すことができる. このような表し方を z の極形式という. また, $\theta = \arg z$ と表し, これを z の偏角という. θ は 2π の整数倍の差を除いて一意的に定まる.

問 5.10 $z \in \mathbf{C}$ の偏角を $\arg z$ と表す理由を述べよ.

極形式に関して, 次がなりたつ.

定理 5.6 (de Moivre の定理) $\theta \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

がなりたつ.

問 5.11 de Moivre の定理を証明せよ.

問 5.12 de Moivre の定理を用いることにより, 3 倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \quad \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

を示せ.

さて, 複素数を 2 次の実行列を用いて表そう. 2 次の実行列全体からなる集合 $M_2(\mathbf{R})$ の部分集合 X を

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

により定め, \mathbf{C} から X への写像 $\varphi: \mathbf{C} \rightarrow X$ を

$$\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, 次がなりたつ.

定理 5.7 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w)$.

(2) $\varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w)$.

問 5.13 次の問に答えよ.

(1) 定理 5.7 の (1) を示せ.

(2) 定理 5.7 の (2) を示せ.

φ は全単射であり, $\varphi(1) = E_2$ だから, 定理 5.7 より, X は φ を通して四則演算も込めて複素数全体の集合 \mathbf{C} とみなすことができる.