§6. 転置行列

§5 の最後に定めた $\mathbf{C}$ から X への全単射 $\varphi : \mathbf{C} \to X$ は, $z = a + bi \in \mathbf{C}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ に対して,

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in X$$

を対応させるから, $\bar{z} = a - bi$ に対しては,

$$\varphi(\bar{z}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

を対応させる.

一般に, $m \times n$ 行列 A に対して, A の行と列を入れ替えて得られる $n \times m$ 行列を ${}^tA$, A^t または ${}^TA$ 等と表し, A の転置行列という. すなわち,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のとき,

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

である. 特に, n 次行列の転置行列は n 次行列である. また, 転置行列の定義より,

$${}^t({}^tA) = A$$

がなりたつ. なお, 転置行列をつくることを転置をとるともいう.

転置行列の記号を用いると, 始めに述べたことは

$$\varphi(\bar{z}) = {}^t(\varphi(z)) \quad (z \in \mathbf{C})$$

と表すことができる. すなわち, 共役複素数は転置行列に対応する.

例 6.1 2×3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の転置行列は 3×2 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ である.

問 6.1 転置行列に対して, 「^{t}」という記号を用いる理由を答えよ.

行列の演算と転置行列の関係について, 次がなりたつ.

定理 6.1 A, B を行列とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
(2) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
(3) c をスカラーとすると, ${}^t(cA) = c{}^tA$.

証明 (1) のみ示す.

転置行列の定義より,

$$\begin{aligned} {}^t(A+B)\text{ の }(i,j)\text{ 成分} &= A+B\text{ の }(j,i)\text{ 成分} \\ &= A\text{ の }(j,i)\text{ 成分} + B\text{ の }(j,i)\text{ 成分} \\ &= {}^tA\text{ の }(i,j)\text{ 成分} + {}^tB\text{ の }(i,j)\text{ 成分}, \end{aligned}$$

すなわち,

$$ {}^t(A+B)\text{ の }(i,j)\text{ 成分} = {}^tA\text{ の }(i,j)\text{ 成分} + {}^tB\text{ の }(i,j)\text{ 成分}$$

である. よって, (1) がなりたつ. □

定理 6.1 の (2) については, 左辺と右辺で A, B の順序が逆になるので, 注意が必要である.

問 6.2 次の問に答えよ.
(1) 定理 6.1 の (2) を示せ.
(2) 定理 6.1 の (3) を示せ.

以下では, 転置行列を用いて定義される特別な実正方行列の例である, 対称行列, 交代行列, 直交行列について順に述べよう.

定義 6.1 A を実正方行列とする. ${}^tA = A$ となるとき, A を対称行列という.

例 6.2 3 つの実正方行列

$$(1), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

はすべて対称行列である.

対称行列について, 次がなりたつ.

定理 6.2 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ とする. A が対称行列であるための必要十分条件は

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

である.

証明 転置行列の定義より,

$$\begin{aligned} {}^tA\text{ の }(i,j)\text{ 成分} &= A\text{ の }(j,i)\text{ 成分} \\ &= a_{ji} \end{aligned}$$

である. よって, A が対称行列, すなわち, ${}^tA = A$ であるための必要十分条件は上のようにあたえられる. □

問 6.3 次の行列が対称行列となるような a の値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^3 & a^4 & a^5 \\ a^6 & a^7 & a^8 \end{pmatrix}$.

問 6.4 $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とする.

(1) ${}^tAA$ および $A{}^tA$ は対称行列であることを示せ.
(2) ${}^tAA$ および $A{}^tA$ の対角成分は 0 以上であることを示せ.

交代行列は次のように定められる.

定義 6.2 A を実正方行列とする. ${}^tA = -A$ となるとき, A を交代行列または反対称行列という.

例 6.3 3 つの実正方行列

$$(0),\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

はすべて交代行列である.

定理 6.2 に対応して, 交代行列については次がなりたつ.

定理 6.3 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ とする. A が交代行列であるための必要十分条件は

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

である. 特に, 交代行列の対角成分はすべて 0 である.

問 6.5 定理 6.3 を示せ.

問 6.6 次の行列が交代行列となるような a, b の値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^2 & a+b \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ -a^3 & a+b & a^5 \\ -a^6 & -a^7 & b-a^2b \end{pmatrix}$.

任意の実正方行列は対称行列と交代行列の和で一意的に表される. すなわち, 次がなりたつ.

定理 6.4 A を実正方行列とする. このとき, ある対称行列 X および交代行列 Y が一意的に存在し,

$$A = X + Y$$

がなりたつ.

問 6.7 定理 6.4 を示せ.

直交行列は次のように定められる.

定義 6.3 A を実正方行列とする. 等式

$$A{}^tA = {}^tAA = E$$

がなりたつとき, A を直交行列という.

注意 6.1 定義 6.3 において, 直交行列は $A{}^tA = E$ または ${}^tAA = E$ の何れか一方をみたす A であると定めてもよいことが分かる.

直交行列の「直交」という言葉の意味は, $\mathbf{R}^n$ に標準内積という構造を付け加えることによって説明することができるが, ここでは詳しくは述べないこととする.

n 次の直交行列全体の集合を $\mathrm{O}(n)$ と表す.

問 6.8　n 次の直交行列全体の集合を $\mathrm{O}(n)$ と表す理由を述べよ.

例 6.4　単位行列 E は実正方行列であり,

$$\begin{aligned} E{}^tE &= {}^tE \\ &= E, \end{aligned}$$

すなわち, $E{}^tE = E$ である. よって, E は直交行列である.

例 6.5　x についての方程式

$$x^2 = 1$$

を解くと, $x = \pm 1$ である. よって,

$$\mathrm{O}(1) = \{\pm 1\}$$

である.

問 6.9　次の問に答えよ.

(1) $\mathrm{O}(2)$ は

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \middle| \, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

と表されることを示せ.

(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ とし, $f \in \mathrm{End}\,(\mathbf{R}^2)$ を

$$f(x) = x \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. f の幾何学的な意味を述べよ.

(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ とし, $g \in \mathrm{End}\,(\mathbf{R}^2)$ を

$$g(x) = x \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. g の幾何学的な意味を述べよ.

問 6.10　次の行列が直交行列となるような a, b, c の値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \\ a & 0 & -2c \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \\ 2a & 0 & -c \end{pmatrix}$.

問 6.11　$A, B \in \mathrm{O}(n)$ ならば, $AB \in \mathrm{O}(n)$ であることを示せ.