

§1. 集合

集合は現代数学において必要不可欠な概念である。まず、集合とはものの集まりのことである。ただし、ものの集まりといっても数学では集められるものがはっきりと定まる必要がある。

例 1.1 自然数全体の集まりは集合である。自然数全体の集合を \mathbf{N} と表す。これに対して、例えば、かなり大きい自然数全体の集まりは集合とはいわない。「かなり大きい」という言葉の意味が数学的には曖昧ではっきりしないからである。

\mathbf{N} 以外にも数学でよく現れる、数^{すう}からなる集合を挙げておこう。

例 1.2 整数全体の集合、有理数全体の集合、実数全体の集合、複素数全体の集合をそれぞれ \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C} と表す。

A を集合とする。 A を構成する1つ1つのものを A の要素または元^{げん}という。 a が A の元であることを $a \in A$ または $A \ni a$ と表す。このとき、 a は A に属する、 a は A に含まれる、または A は a を含むという。 a が A の元でないときは、否定を意味する記号「/」を用いて、 $a \notin A$ または $A \not\ni a$ と表す。

例 1.3 1 は自然数である。すなわち、 $1 \in \mathbf{N}$ である。これを $\mathbf{N} \ni 1$ と表す。一方、 -1 は自然数ではない。すなわち、 $-1 \notin \mathbf{N}$ である。これを $\mathbf{N} \not\ni -1$ と表す。

例 1.4 -2 は整数、有理数、実数、複素数の何れでもある。すなわち、 $-2 \in \mathbf{Z}$, $-2 \in \mathbf{Q}$, $-2 \in \mathbf{R}$, $-2 \in \mathbf{C}$ である。しかし、 -2 は自然数ではない。すなわち、 $-2 \notin \mathbf{N}$ である。

$\frac{1}{2}$ は有理数、実数、複素数の何れでもあるが、整数ではない。すなわち、 $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$, $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{2} \in \mathbf{C}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$ である。

$\sqrt{2}$ は実数でも複素数でもある。すなわち、 $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{C}$ である。しかし、 $\sqrt{2}$ は無理数、すなわち、有理数ではない実数であることを背理法により示すことができる。すなわち、 $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ である。

A を集合とする。 a および b が A の元であること、すなわち、 $a \in A$, $b \in A$ であることを簡単に $a, b \in A$ と表す。また、 a および b が A の元でないときは $a, b \notin A$ と表す。元の個数が2個を超える場合についても同様である。

例 1.5 i を虚数単位とする。このとき、 i および $2 - 3i$ は複素数ではあるが、実数ではない。すなわち、 $i, 2 - 3i \in \mathbf{C}$, $i, 2 - 3i \notin \mathbf{R}$ である。

A, B を集合とする。 A のどの元も B に含まれ、 B のどの元も A に含まれるとき、すなわち、 $x \in A$ ならば $x \in B$ であり、 $x \in B$ ならば $x \in A$ であるとき、 $A = B$ と表し、 A と B は等しいという。また、 A と B が等しくないとき、すなわち、 $A = B$ でないときは $A \neq B$ と表す。 $A = B$ でないとは、 $x \in A$ であるが $x \notin B$ となる x が存在するか、または、 $x \in B$ であるが $x \notin A$ となる x が存在することである。

例 1.6 A を素数ではない正の偶数全体の集合、 B を2より大きい偶数全体の集合とする。このとき、 $A = B$ である。

例 1.7 例 1.4 および例 1.5 より、 \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C} は互いに等しくない。例えば、 $\mathbf{N} \neq \mathbf{Z}$ である。

集合を表すには構成するすべての元を中括弧 $\{ \}$ の中に書き並べる方法が1つに挙げられる。これを外延的記法という。外延的記法においては、書き並べる元の順序は替えてもよいし、同じ元を複数回書き並べてもよい。

例 1.8 1 と2からなる集合は $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$, $\{1, 1, 2\}$ 等と表すことができる。

\mathbf{N} の元を完全に書き尽くすことはできないが,

$$\{1, 2, 3, \dots\}$$

と表せば, これは \mathbf{N} と等しいと推察することができる. これが \mathbf{N} の外延的記法による表し方である. しかし, このような表し方は誤解が生じる恐れもある. また, 100 個や 1000 個といった多くの元からなる集合に対しては, 外延的記法はあまり向かない. そこで, 集合を表すもう 1 つの方法として内包的記法が挙げられる. これはある条件 C をみたすもの全体の集合を

$$\{x \mid x \text{ は条件 } C \text{ をみたす}\}$$

と表す方法である. 「 \mid 」の部分は代わりにコロン「:」やセミコロン「;」を用いることもある. また, 集合 A の元であり, 更に条件 C をみたすもの全体の集合は

$$\{x \mid x \in A, x \text{ は条件 } C \text{ をみたす}\}$$

と表すことができるが, これを

$$\{x \in A \mid x \text{ は条件 } C \text{ をみたす}\}$$

とも表す.

例 1.9 0 以上の実数全体の集合は

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$$

または

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$$

と表すことができる.

元を 1 つも含まない集合も考え, これを空であるという. 空である集合, すなわち, 空集合は外延的記法では $\{\}$ と表すことができるが, \emptyset と表すことが多い.

例 1.10 x の 2 次方程式

$$x^2 = -1$$

の解は複素数の範囲では存在し, $x = \pm i$ であるが, 実数の範囲では存在しない. よって,

$$\{x \in \mathbf{C} \mid x^2 = -1\} = \{\pm i\}$$

であるが,

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset$$

である. ただし, 集合 $\{i, -i\}$ を簡単に $\{\pm i\}$ と表した.

元を有限個しか含まない, すなわち, 元の個数がある $n \in \mathbf{N}$ を用いて n 個となる集合と空集合を合わせて有限集合という. 有限集合でない集合を無限集合という.

例 1.11 集合

$$\{n \in \mathbf{N} \mid n \leq 100\}$$

は 100 個の元からなる有限集合である. 一方, 集合

$$\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq 100\}$$

は無限集合である.

2つの集合に対して、次のように含む、或いは含まれないという関係、すなわち、^{ほうがん}包含関係というものを考えることができる. A, B を集合とする. A のどの元も B に含まれるとき、すなわち、 $x \in A$ ならば $x \in B$ となるとき、 $A \subset B$ または $B \supset A$ と表し、 A を B の部分集合という. このとき、 A は B に含まれる、または B は A を含むという. ただし、空集合は任意の集合の部分集合とみなす. すなわち、 A がどのような集合であろうとも、 $\emptyset \subset A$ である. また、 $A \subset B$ でないときは $A \not\subset B$ または $B \not\supset A$ と表す. $A \subset B$ でないとは、 $x \in A$ であるが $x \notin B$ となる x が存在することである. なお、 $A \subset B$ 、 $A \neq B$ のときは $A \subsetneq B$ または $B \supsetneq A$ と表し、 A を B の真部分集合という.

例 1.12 自然数は整数、有理数、実数、複素数の何れでもあるから、 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ 、 $\mathbf{N} \subset \mathbf{C}$ である. また、例 1.4 より、 $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{R}$ 、 $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{C}$ と表すこともできる.

包含関係に関して、次がなりたつ.

定理 1.1 A, B, C を集合とすると、次の (1)~(3) がなりたつ.

- (1) $A \subset A$.
- (2) $A \subset B$ 、 $B \subset A$ ならば、 $A = B$.
- (3) $A \subset B$ 、 $B \subset C$ ならば、 $A \subset C$.

証明 (1) は明らかである. (2) のみ示す.

(2): $A \subset B$ より、 $x \in A$ ならば $x \in B$ である. また、 $B \subset A$ より、 $x \in B$ ならば $x \in A$ である. よって、 $A = B$ である. \square

集合を元とするような集合を考えることもある. ここでは、次のようなものを定義しておこう.

定義 1.1 A を集合とする. A の部分集合全体からなる集合を 2^A や $\mathfrak{P}(A)$ 等と表し、 A の^{べき}巾集合という.

例 1.13 $A = \emptyset$ のとき、 A の部分集合は \emptyset のみである. よって、 $2^A = \{\emptyset\}$ である. \emptyset が空集合を表すのに対して、 $\{\emptyset\}$ は空集合という 1 つの集合を元とする集合であることに注意しよう.

$A = \{1\}$ のとき、 A の部分集合は \emptyset または $\{1\}$ である. よって、

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}\}$$

である.

集合 A の巾集合を 2^A と表す理由は次による.

定理 1.2 A を n 個の元からなる有限集合とすると、 A の巾集合は 2^n 個の元からなる.

証明 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ とすると、 n 個のものから k 個のものを選ぶ組み合わせは ${}_n C_k$ 通りである. よって、 A の巾集合の元の個数は二項定理より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n {}_n C_k &= (1+1)^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

である. \square

問題 1

1. A を正の偶数全体の集合, B を正の奇数全体の集合, C を素数全体の集合とする.

(1) 互いに異なる x, y で, $x, y \in C, x, y \notin A$ となるものを 1 組答えよ.

(2) 互いに異なる x, y, z で, $x, y, z \in B, x, y, z \notin C$ となるものを 1 組答えよ.

2. 次の集合を外延的記法により表せ.

(1) 3 以下の自然数全体の集合.

(2) 絶対値が 4 未満の整数全体の集合.

3. 次の内包的記法により表された集合を外延的記法により表せ.

(1) $\{n \in \mathbf{N} \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数}\}$.

(2) $\{n \in \mathbf{Z} \mid n \text{ は } pq^2 \text{ の約数}\}$. ただし, p, q は互いに異なる素数である.

(3) $\{X \mid X \text{ は正則な巾零行列}\}$.

4. 集合

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right)^2 \text{ は零行列} \right\}$$

が有限集合か無限集合であるかを調べよ.

5. $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ の中から互いに異なるものを 2 つ選んだときになりたつ包含関係を記号「 \subset 」を用いてすべて書け.

6. $a, b \in \mathbf{R}$ とする. $a < b$ のとき, $(a, b) \subset \mathbf{R}$ を

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$

により定め, これを有界开区間または开区間という. また, $[a, b), (a, b] \subset \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$$

により定め, これらをそれぞれ右半开区間, 左半开区間という. $a \leq b$ のとき, $[a, b] \subset \mathbf{R}$ を

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

により定め, これを有界閉区間または閉区間という. 更に, $(a, +\infty), (-\infty, b) \subset \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$$

により定め, これらを無限开区間という. また, $[a, +\infty), (-\infty, b] \subset \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$$

により定め, これらを無限閉区間という. 以上の \mathbf{R} の部分集合と \mathbf{R} を単に区間ともいう. また, \mathbf{R} は $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ と表す.

次の \mathbf{R} の部分集合を区間の記号を用いて表せ.

(1) $\{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 3 > 5\}$.

(2) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$.

7. $A = \{1, 2\}$ のとき, 2^A を求めよ.

問題 1 の解答

1. (1) 例えば, $x = 3, y = 5$ とすればよい. 実際, 3 と 5 は互いに異なる素数であるが, 正の偶数ではない.
- (2) 例えば, $x = 1, y = 9, z = 15$ とすればよい. 実際, 1, 9, 15 は互いに異なる正の奇数であるが, 素数ではない.

2. (1) 3 以下の自然数は 1, 2, 3 である. よって, 3 以下の自然数全体の集合を外延的記法により表すと,

$$\{1, 2, 3\}$$

である.

- (2) 絶対値が 4 未満の整数は $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ である. よって, 絶対値が 4 未満の整数全体の集合を外延的記法により表すと,

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

である.

3. (1) 10 以下の素数は 2, 3, 5, 7 である. よって, 題意の集合を外延的記法により表すと,

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

である.

- (2) pq^2 の約数は $\pm 1, \pm p, \pm q, \pm pq, \pm q^2, \pm pq^2$ である. よって, 題意の集合を外延的記法により表すと,

$$\{\pm 1, \pm p, \pm q, \pm pq, \pm q^2, \pm pq^2\}$$

である.

- (3) まず, 正則な中零行列が存在しないことを背理法により示す.

X が正則な中零行列であると仮定する. X は中零行列だから, ある $n \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$X^n = O$$

となる. ただし, O は零行列である. ここで, X は正則だから, X の逆行列 X^{-1} が存在する. 上の式の両辺に X^{-1} を右または左から $(n-1)$ 回掛けると,

$$X = O$$

である. 零行列は正則ではないから, これは X が正則であることに矛盾する.

よって, 題意の集合は空集合であり, これを外延的記法により表すと, $\{\}$ である.

4. まず,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = O$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = O,$$

すなわち,

$$a^2 + bc = 0, \quad b(a+d) = 0, \quad c(a+d) = 0, \quad bc + d^2 = 0 \quad (*)$$

である.

$a + d \neq 0$ のとき, (*) の第 2 式と第 3 式より,

$$b = c = 0$$

である. 更に, (*) の第 1 式と第 4 式より,

$$a = d = 0$$

である. これは $a + d \neq 0$ に矛盾する.

$a + d = 0$ のとき, $d = -a$ である. このとき, (*) の第 2 式と第 3 式がなりたち, (*) の第 1 式と第 4 式はともに

$$a^2 + bc = 0$$

である. この式をみたま $a, b, c \in \mathbf{R}$ は無限に存在する.

よって, 題意の集合は無有限集合である.

5. まず, 整数は有理数, 実数, 複素数の何れでもあるから, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$ である. また, 有理数は実数でも複素数でもあるから, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{C}$ である. 更に, 実数は複素数でもあるから, $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ である.

6. (1) 不等式

$$2x + 3 > 5$$

より,

$$2x > 2,$$

すなわち, $x > 1$ である. よって, 題意の集合は無有限開区間 $(1, +\infty)$ である.

- (2) 不等式

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

より,

$$(x - 1)(x - 2) \leq 0,$$

すなわち,

$$1 \leq x \leq 2$$

である. よって, 題意の集合は無有限閉区間 $[1, 2]$ である.

7. $\{1, 2\}$ の部分集合は \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$ である. よって,

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

である.