

### §6. Euclid 空間の等長変換

初等幾何学では平面上の三角形の合同条件等が扱われるが、一般に、Euclid 空間内の図形が合同であるとは、等長変換というもので写り合うこととして定められる。そして、等長変換で写しても変わらない Euclid 空間内の図形の性質を調べる幾何学は Euclid 幾何学とよばれる。

まず、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

とすると、 $x$  と  $y$  を結んで得られる線分の長さは、三平方の定理より、

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|$$

である。そこで、次のように定める。

**定義 6.1**  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  で定義された実数値関数  $d: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

により定める。このとき、 $d$  を  $\mathbf{R}^n$  の Euclid 距離、 $d(x, y)$  を  $x$  と  $y$  の Euclid 距離という。

Euclid 距離を用いて、Euclid 空間の等長変換を次のように定める。

**定義 6.2**  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  を  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^n$  への写像とする。  $f$  が全単射であり、Euclid 距離を保つ、すなわち、任意の  $x, y \in \mathbf{R}^n$  に対して、等式

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \tag{1}$$

がなりたつとき、 $f$  を  $\mathbf{R}^n$  の等長変換または合同変換という。

$\mathbf{R}^n$  の等長変換全体の集合を  $\text{Iso}(\mathbf{R}^n)$  と表す。等長変換の定義より、次がなりたつことが分かる。

**定理 6.1**  $f, g \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$  とすると、次の (1), (2) がなりたつ。

(1)  $g \circ f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ .

(2)  $f^{-1} \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ .

次に述べるように、 $\mathbf{R}^n$  の等長変換は直交行列と列ベクトルを用いて表すことができる。

**定理 6.2**  $f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$  は  $A \in O(n)$  および  $b \in \mathbf{R}^n$  を用いて、

$$f(x) = Ax + b \quad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{*}$$

と表される。

**証明** 次の (1)~(4) の順に分けて示す。

(1) まず、(\*) のように表される  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^n$  への写像  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  は  $\mathbf{R}^n$  の等長変換である。

(2) 逆に、 $f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$  とする。  $e_1, e_2, \dots, e_n$  を  $\mathbf{R}^n$  の基本ベクトル、すなわち、

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし,  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して,  $a_i \in \mathbf{R}^n$  を

$$a_i = f(e_i) - f(0)$$

により定める. このとき,  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の正規直交基底である.

(3) (2) および定理 5.4 より,  $A \in O(n)$  を  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  により定めることができる. 更に,  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^n$  への写像  $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  を

$$g(x) = Ax + f(0) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めると, (1) より,  $g \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$  である. このとき, 任意の  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して,

$$\|(g^{-1} \circ f)(x)\| = \|x\|$$

である.

(4)  $f = g$  である. 特に,  $b = f(0)$  とおくと,  $f$  は (\*) のように表される.

(1):  $f$  が全単射であり, Euclid 距離を保つことを示せばよい.  $f$  が Euclid 距離を保つことのみ示す.

$x, y \in \mathbf{R}^n$  とすると, 定理 5.4 より,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| \\ &= \|(Ax + b) - (Ay + b)\| \\ &= \|A(x - y)\| \\ &= \|x - y\| \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

である. よって,  $f$  は Euclid 距離を保つ.

(2):  $i, j = 1, 2, \dots, n$  とし, 問題 5.3 (1) において,  $x, y$  をそれぞれ  $a_i, -a_j$  に置き換えると, 等長変換の定義より,

$$\begin{aligned} -2\langle a_i, a_j \rangle &= \|a_i - a_j\|^2 - \|a_i\|^2 - \|a_j\|^2 \\ &= \|(f(e_i) - f(0)) - (f(e_j) - f(0))\|^2 - \|f(e_i) - f(0)\|^2 - \|f(e_j) - f(0)\|^2 \\ &= \|f(e_i) - f(e_j)\|^2 - \|f(e_i) - f(0)\|^2 - \|f(e_j) - f(0)\|^2 \\ &= d(f(e_i), f(e_j))^2 - d(f(e_i), f(0))^2 - d(f(e_j), f(0))^2 \\ &= d(e_i, e_j)^2 - d(e_i, 0)^2 - d(e_j, 0)^2 \\ &= \|e_i - e_j\|^2 - \|e_i - 0\|^2 - \|e_j - 0\|^2 \\ &= \|e_i - e_j\|^2 - 1 - 1 \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\|e_i - e_j\|^2 = \begin{cases} 0 & (i = j), \\ 2 & (i \neq j) \end{cases}$$

だから,  $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$  となる. ただし,  $\delta_{ij}$  は Kronecker の  $\delta$  である. よって,  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の正規直交基底である.

(3): 定理 6.1 より,  $g^{-1} \circ f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$  である. 更に,  $f(0) = g(0)$  だから,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|x - 0\| \\
&= d(x, 0) \\
&= d((g^{-1} \circ f)(x), (g^{-1} \circ f)(0)) \\
&= d((g^{-1} \circ f)(x), 0) \\
&= \|(g^{-1} \circ f)(x)\|,
\end{aligned}$$

すなわち,

$$\|(g^{-1} \circ f)(x)\| = \|x\|$$

である.

(4): (3) において,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (g^{-1} \circ f)(x)$$

とおく. このとき,

$$\|x\| = \|y\| \tag{a}$$

である. また,  $i = 1, 2, \dots, n$  のとき,

$$\begin{aligned}
d(x, e_i)^2 &= \|x - e_i\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\langle x, e_i \rangle + \|e_i\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2x_i + 1,
\end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x, e_i)^2 = \|x\|^2 - 2x_i + 1 \tag{b}$$

である. 同様に,

$$d(y, e_i)^2 = \|y\|^2 - 2y_i + 1 \tag{c}$$

である. ここで,  $g^{-1} \circ f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$  であり,

$$\begin{aligned}
g(e_i) &= Ae_i + f(0) \\
&= a_i + f(e_i) - a_i \\
&= f(e_i),
\end{aligned}$$

すなわち,  $f(e_i) = g(e_i)$  だから,

$$\begin{aligned}
d(x, e_i) &= d((g^{-1} \circ f)(x), (g^{-1} \circ f)(e_i)) \\
&= d(y, e_i),
\end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x, e_i) = d(y, e_i) \tag{d}$$

である. よって, (a)~(d) より, 任意の  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して,  $x_i = y_i$  である. したがって,  $x = y$ , すなわち,  $g^{-1} \circ f = 1_{\mathbf{R}^n}$  となるから,  $f = g$  である.  $\square$

## 問題 6

1.  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を内積空間,  $\| \cdot \|$  を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  により定まるノルムとする. このとき,  $V \times V$  で定義された実数値関数  $d: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

により定める.

- (1) 任意の  $x, y \in V$  に対して,  $d(x, y) \geq 0$  であり, 更に,  $d(x, y) = 0$  となるのは  $x = y$  のときに限ることを示せ.  $d$  のこの性質を正值性という.
- (2) 任意の  $x, y \in V$  に対して,  $d(x, y) = d(y, x)$  であることを示せ.  $d$  のこの性質を対称性という.
- (3) 任意の  $x, y, z \in V$  に対して, 不等式

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

がなりたつことを示せ. この不等式を三角不等式という.

2.  $X$  を空でない集合とし,  $X \times X$  で定義された実数値関数  $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  が次の (a)~(c) をみたすとする.

- (a) 任意の  $x, y \in X$  に対して,  $d(x, y) \geq 0$  であり, 更に,  $d(x, y) = 0$  となるのは  $x = y$  のときに限る. (正值性)
- (b) 任意の  $x, y \in X$  に対して,  $d(x, y) = d(y, x)$  である. (対称性)
- (c) 任意の  $x, y, z \in X$  に対して, 三角不等式

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

がなりたつ.

このとき,  $d$  を  $X$  の距離,  $d(x, y)$  を  $x$  と  $y$  の距離, 組  $(X, d)$  を距離空間という. 例えば, 問題 6.1 より, 内積空間は距離空間となる. 特に, Euclid 空間は距離空間となる.

- (1)  $X$  を空でない集合とし,  $X \times X$  で定義された実数値関数  $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

により定める. このとき, 明らかに,  $d$  は正值性および対称性をみたす.  $d$  は三角不等式をみたすことを示せ. 特に,  $d$  は  $X$  の距離となる.  $d$  を離散距離,  $(X, d)$  を離散距離空間または離散空間という.

- (2)  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  を距離空間,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とする. 任意の  $x, y \in X$  に対して, 等式

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

がなりたつとき,  $f$  を等長写像という.

等長写像は単射であることを示せ. 特に, 定義 6.2 の  $\mathbf{R}^n$  の等長変換の定義において,  $f$  の単射性の仮定は不要であることが分かる.

- (3)  $(X, d)$  を距離空間とする.  $X$  上の恒等写像  $1_X$  は  $X$  から  $X$  への等長写像であることを示せ.

## 問題 6 の解答

1. (1) ノルムの正值性より,  $\|x - y\| \geq 0$  であり, 更に,  $\|x - y\| = 0$  となるのは  $x - y = 0$  のときに限る. すなわち,  $d$  の定義より,  $d(x, y) \geq 0$  であり, 更に,  $d(x, y) = 0$  となるのは  $x = y$  のときに限る.
- (2) ノルムの性質より,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|(-1)(y - x)\| \\ &= |-1| \|y - x\| \\ &= 1 \cdot d(y, x) \\ &= d(y, x), \end{aligned}$$

すなわち,  $d(x, y) = d(y, x)$  である.

- (3) ノルムに関する三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| \\ &= \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x, y) + d(y, z), \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

である.

2. (1)  $x, y, z \in X$  とする.  
 $x = z$  のとき,  $d$  の定義より,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= 0 \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

である.

$x \neq z$  のとき,  $x \neq y$  または  $y \neq z$  だから,  $d$  の定義より,  $d(x, y) = 1$  または  $d(y, z) = 1$  である. よって,  $d$  の定義より,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= 1 \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

である.

したがって,  $d$  は三角不等式をみたす.

- (2)  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  を距離空間,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への等長写像とする.  $x, y \in X$ ,  $f(x) = f(y)$  とすると,  $d_Y$  の正值性および等長写像の定義より,

$$\begin{aligned} 0 &= d_Y(f(x), f(y)) \\ &= d_X(x, y), \end{aligned}$$

すなわち,  $d_X(x, y) = 0$  である. よって,  $d_X$  の正值性より,  $x = y$  である. したがって,  $f$  は単射, すなわち, 等長写像は単射である.

(3)  $x, y \in X$  とすると, 恒等写像の定義より,  $1_X(x) = x, 1_X(y) = y$  である. よって,

$$d(1_X(x), 1_X(y)) = d(x, y)$$

となるから,  $1_X$  は等長写像である.