§10. 有理関数の積分

多項式の比として表される関数を有理関数という．ここでは有理関数の積分を考えよう．まず, x の有理関数は部分分数分解により, 次の (1)〜(3) の形の関数の和として表されることが分かる．

(i) x の多項式.

(ii) $\dfrac{A}{(x-\alpha)^n}$ $(A,\ \alpha \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$.

(iii) $\dfrac{Ax+B}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}$ $(A,\ B,\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R},\ \beta \neq 0,\ n \in \mathbf{N})$.

例 10.1 (未定係数法)　有理関数

$$f(x) = \frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1}$$

を考えると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x^3+1)+(x^3+1)+x^2+x+2}{x^3+1} \\ &= x+1+\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

であり,

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

である．ここで,

$$\frac{x^2+x+2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1} \quad (a,\ b,\ c \in \mathbf{R})$$

とおくと, 右辺は

$$\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{x^3+1} = \frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$$

となり, 分子の係数を比較すると,

$$a+b=1, \quad -a+b+c=1, \quad a+c=2$$

である．これを解くと,

$$a=\frac{2}{3}, \quad b=\frac{1}{3}, \quad c=\frac{4}{3}$$

だから,

$$f(x) = x+1+\frac{2}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\frac{x+4}{x^2-x+1}$$

である．このように部分分数分解を求める方法を未定係数法という．

さて, x の多項式として表される関数の不定積分は定理 9.2 (1) および定理 9.6 (1), (2) を用いて求めることができる．また, (ii) の形で表される関数の不定積分は

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx = \begin{cases} A\log|x-\alpha| & (n=1), \\ \dfrac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

と求めることができる．更に, (iii) の形で表される関数の不定積分についてであるが, 原理的には次の定理を用いて計算することができる．

定理 10.1 (iii) の形で表される関数の不定積分について, 次がなりたつ．

(1) 等式

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{A}{2}\log\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} + \frac{A\alpha+B}{\beta}\tan^{-1}\frac{x-\alpha}{\beta}$$

がなりたつ．

(2) $n = 2, 3, 4, \ldots$ のとき,

$$I_n = \int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}$$

とおくと, 等式

$$\int \frac{Ax+B}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}\,dx = \frac{A}{2(1-n)\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} + (A\alpha+B)I_n$$

がなりたつ．

(3) (2) の I_n は漸化式

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)\beta^2}\left[\frac{x-\alpha}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]$$

をみたす．

証明 (1) のみ示す．

まず,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int \frac{A(x-\alpha)+A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx \\
&= A\int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \\
&= \frac{A}{2}\log\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}
\end{aligned}$$

である．ここで,

$$x-\alpha = \beta\tan t$$

とおくと,

$$dx = \frac{\beta}{\cos^2 t}\,dt$$

だから, 置換積分法より,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} &= \int \frac{1}{\frac{\beta^2}{\cos^2 t}}\frac{\beta}{\cos^2 t}\,dt \\
&= \int \frac{dt}{\beta} \\
&= \frac{1}{\beta}t \\
&= \frac{1}{\beta}\tan^{-1}\frac{x-\alpha}{\beta}
\end{aligned}$$

である. よって, (1) の等式がなりたつ. □

問 10.1　次の問に答えよ.
(1) 定理 10.1 (1) を右辺を微分することにより示せ.
(2) 定理 10.1 (2) を左辺を積分することにより示せ.
(3) 定理 10.1 (3) を示せ.

ここまでに述べたことをまとめると, 次を得る.

定理 10.2　有理関数の不定積分は有理関数, 対数関数, 逆正接関数を用いて表される.

問 10.2　次の問に答えよ.
(1) 等式

$$\int \frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式を例 10.1 で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.3　$a>0$ とする. 次の問に答えよ.
(1) 等式

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.
(3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.4　次の問に答えよ.
(1) 等式

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.
(3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.5　次の問に答えよ.
(1) 等式

$$\int \frac{dx}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\log|x-1| + \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.
(3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.6　次の問に答えよ.
(1) 等式

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)\right\}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

(2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.

(3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.7 次の問に答えよ.

(1) 等式

$$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

(2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.

(3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.8 $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

とおく. I_n は漸化式

$$I_n = \frac{1}{(n-1)\cdot 2^n} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \quad (n = 2,\, 3,\, 4,\, \dots)$$

をみたすことを示せ.

問 10.9 $n = 0,\, 1,\, 2,\, \dots$ に対して,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

とおく.

(1) I_n は漸化式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n = 2,\, 3,\, 4,\, \dots)$$

をみたすことを示せ.

(2) $k = -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \dots$ に対して, k の 2 重階乗 $k!!$ の定義を述べよ.

(3) I_n は 2 重階乗を用いて,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}), \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

と表されることを示せ.

問 10.10 $n = 0,\, 1,\, 2,\, \dots$ に対して,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

とおく. I_n は漸化式

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} \quad (n = 2,\, 3,\, 4,\, \dots)$$

をみたすことを示せ.