

## §12. 広義積分

閉区間で定義された関数に対する定積分と関数の極限を組み合わせることにより、その他の区間で定義された関数に対して、広義積分というものを考えることができる。

まず、 $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  を無限閉区間  $[a, +\infty)$  で定義された関数とする。  $a < b$  をみだす任意の  $b \in \mathbf{R}$  に対して、 $f$  が閉区間  $[a, b]$  で積分可能であり、極限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \in \mathbf{R}$$

が存在するとき、これを

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

と表し、 $f$  は  $[a, +\infty)$  で広義積分可能であるという。

$f$  の定義域がその他の区間の場合についても、同様に広義積分を考えることができる。例えば、右半開区間  $[a, b)$  で定義された関数  $f: [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  に対しては、極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

を考え、広義積分可能なときは上の極限を

$$\int_a^b f(x) dx$$

と表し、 $\mathbf{R}$  で定義された関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  に対しては、2つの極限を独立に考え、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx$$

とするのである。

また、関数が定義されている区間を分割して広義積分可能になる場合は、分割した区間毎に考える。例えば、开区間  $(a, b)$  で定義された関数  $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  が开区間  $(a, c)$  および  $(c, b)$  で広義積分可能な場合は

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

とする。

**例 12.1** 無限閉区間  $[0, +\infty)$  で定義された関数  $\frac{1}{1+x^2}$  の広義積分は

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [\tan^{-1} x]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

**注意 12.1** 広義積分の計算をする際には,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} [F(x)]_a^b = [F(x)]_a^{+\infty}$$

等と表すことが多い.

**例 12.2**  $a \in \mathbf{R}$  とする. 定理 9.2 (1), (2) に注意すると, 無限閉区間  $[1, +\infty)$  で定義された関数  $x^a$  が広義積分可能となるのは,  $a < -1$  のときである. 更に,  $a < -1$  のとき,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} x^a dx &= \left[ \frac{1}{a+1} x^{a+1} \right]_1^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{a+1} \end{aligned}$$

である.

**問 12.1** 次の広義積分の値を求めよ.

(1)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}$ .

(2)  $\int_0^{+\infty} e^{ax} \sin bx dx$ . ただし,  $a < 0, b \in \mathbf{R}$ .

(3)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$ .

(4)  $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

(5)  $\int_{-a}^b \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} dx$ . ただし,  $a, b \in \mathbf{R}, -a < b$ .

(6)  $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ . ただし,  $n \in \mathbf{N}$ .

(7)  $\int_0^1 \log x dx$ .

(8)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ .

(9)  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - 1|}}$ .

関数が広義積分可能であるかどうかは次の定理を用いて調べることができる.

**定理 12.1**  $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  を区間  $[a, b)$  で定義された関数とする.

任意の  $x \in [a, b)$  に対して, 不等式

$$|f(x)| \leq g(x)$$

がなりたち,  $g$  が  $[a, b)$  で広義積分可能ならば,  $f$  は  $[a, b)$  で広義積分可能である.

任意の  $x \in [a, b)$  に対して, 不等式

$$0 \leq g(x) \leq f(x)$$

がなりたち,  $g$  が  $[a, b)$  で広義積分可能でないならば,  $f$  は  $[a, b)$  で広義積分可能でない.

$f, g$  の定義域がその他の区間の場合についても、同様の事実がなりたつ。

広義積分を用いて定義される重要な関数の例として、 $\Gamma$  関数と  $B$  関数を挙げておこう。

**例 12.3 ( $\Gamma$  関数)**  $s > 0$  とし、関数  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = e^{-x}x^{s-1} \quad (x \in (0, +\infty))$$

により定める。上の定理を用いることにより、 $f$  は  $(0, +\infty)$  で広義積分可能であることが分かる。このとき、

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1} dx$$

と表し、 $\Gamma(s)$  を  $\Gamma$  関数という。

次に示すように、 $\Gamma$  関数は階乗の一般化とみなすことができる。

**定理 12.2** 次の (1), (2) がなりたつ。

- (1)  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ .
- (2)  $n \in \mathbf{N}$  とすると、 $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

**証明** (1)のみ示す。

部分積分法より、

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^s dx \\ &= \int_0^{+\infty} (-e^{-x})'x^s dx \\ &= [-e^{-x}x^s]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}sx^{s-1} dx \end{aligned}$$

である。ここで、第1項は0となることが分かるから、(1)が得られる。 □

**問 12.2** 定理 12.2 (2) を示せ。

次に、 $B$  関数について述べよう。

**例 12.4 ( $B$  関数)**  $p, q > 0$  とし、関数  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1} \quad (x \in (0, 1))$$

により定める。上の定理を用いることにより、 $f$  は  $(0, 1)$  で広義積分可能であることが分かる。このとき、

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

と表し、 $B(p, q)$  を  $B$  関数という。

$B$  関数についても基本的な性質を述べておこう。

**定理 12.3** 次の (1)~(3) がなりたつ。

- (1)  $B(p, q) = B(q, p)$ .
- (2)  $pB(p, q+1) = qB(p+1, q)$ .
- (3)  $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$ .

$$(4) B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt.$$

**問 12.3** 次の問に答えよ.

- (1) 定理 12.3 (1) を置換積分法を用いることにより示せ.
- (2) 定理 12.3 (2) を部分積分法を用いることにより示せ.
- (3) 定理 12.3 (3) を置換積分法を用いることにより示せ.
- (4) 定理 12.3 (4) を置換積分法を用いることにより示せ.

また,  $\Gamma$  関数と  $B$  関数は次の関係で結ばれていることが分かる.

**定理 12.4 (基本関係式)** 等式

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

がなりたつ.

**問 12.4** 次の問に答えよ.

- (1) 基本関係式を用いることにより,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  の値を求めよ.
- (2)  $n \in \mathbf{N}$  のとき,  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$  の値を求めよ.
- (3) 広義積分  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  の値を求めよ. なお, この広義積分を Gauss 積分という.

**問 12.5**  $n = 0, 1, 2, \dots$  のとき, 広義積分

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$$

の値を求めよ.

**問 12.6**  $a > -1$  のとき, 等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right)}$$

がなりたつことを示せ.

**問 12.7** 次の問に答えよ.

- (1)  $x, z > 0, y > \frac{x}{z}$  のとき, 等式

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t^z)^y} dt = \frac{1}{z} B\left(y - \frac{x}{z}, \frac{x}{z}\right)$$

がなりたつことを示せ.

- (2)  $n \in \mathbf{N}$  のとき, 広義積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

の値を求めよ.