§5. 数列

数列 $\{a_n\}$ とは各自然数 n に対して数 a_n を対応させるのであるから, $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ といった数からなる集合への写像に他ならない. $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ への写像として表される数列をそれぞれ有理数列, 実数列, 複素数列ともいう.

例 5.1 (等差数列)　定数 d に対して,

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (n \in \mathbf{N})$$

をみたす数列 $\{a_n\}$ は公差 d の等差数列である. 初項 a, 公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

によりあたえられる.

問 5.1　$a_5 = 14$, $a_7 = 20$ となる等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

例 5.2 (等比数列)　定数 r に対して,

$$a_{n+1} = ra_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

をみたす数列 $\{a_n\}$ は公比 r の等比数列である. 初項 a, 公比 r の等比数列の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

によりあたえられる.

問 5.2　$a_5 = 48$, $a_8 = 384$ となり, 公比が実数の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$\{a_n\}$ を数列とし, $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を $\sum_{k=1}^{n} a_k$ と表す. すなわち,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

である. 更に, $\{b_n\}$ も数列とすると, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $a_n + b_n$ を対応させることにより, 数列 $\{a_n + b_n\}$ を定めることができる. 同様に, c を定数とすると, 数列 $\{ca_n\}$ を定めることができる. このとき, 次がなりたつ.

定理 5.1　次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$.

問 5.3　和を表す記号として, Σ を用いる理由を述べよ.

等差数列, 等比数列の和について, 次がなりたつ.

定理 5.2　次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\{a_n\}$ を初項 a, 公差 d の等差数列とすると,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = an + \frac{n(n-1)d}{2}$$

である.

(2) $\{a_n\}$ を初項 a, 公比 r の等比数列とする. $r \neq 1$ のとき,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

である.

問 5.4　次の問に答えよ.
(1) 定理 5.2 (1) を示せ.
(2) 定理 5.2 (2) を示せ.

次の定理で述べる数列の和もよく現れる.

定理 5.3　次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.
(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

問 5.5　次の問に答えよ.
(1) 定理 5.2 (1) を用いることにより, 定理 5.3 (1) を示せ.
(2) 定理 5.3 (1) を数学的帰納法により示せ.
(3) k についての恒等式

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

がなりたつことを示し, これを用いることにより, 定理 5.3 (2) を示せ.
(4) 定理 5.3 (2) を数学的帰納法により示せ.
(5) k についての恒等式

$$k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$$

がなりたつことを示し, これを用いることにより, 定理 5.3 (3) を示せ.
(6) 定理 5.3 (3) を数学的帰納法により示せ.

問 5.6　次の (1)〜(3) の数列の和を求めよ.
(1) $\sum_{k=1}^{n}(1+2k+3^k)$.
(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.
(3) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

次に, 数列の極限について述べよう. 簡単のため, 以下では特に断らない限り, 実数列のみを考え, これを単に数列ということにする. また, 連続の公理とよばれる $\mathbf{R}$ の重要な性質や ε 論法或いは ε-N 論法とよばれる厳密な議論は扱わないこととする.

定義 5.1　$\{a_n\}$ を数列とする.

ある $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在し, n を十分大きく選べば, a_n を α に限りなく近づけることができるとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

または

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と表し, $\{a_n\}$ は極限 α に収束するという.

n を十分大きく選べば, a_n を限りなく大きくできるとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

または

$$a_n \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

と表し, $\{a_n\}$ は極限 $+\infty$ または正の無限大に発散するという. 同様に, 極限 $-\infty$ または負の無限大に発散する数列を定めることができる.

例 5.3　$r \in \mathbf{R}$ とし, 等比数列 $\{r^n\}$ について考える. まず, $-1 < r \leq 1$ のとき, $\{r^n\}$ は収束し,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 1 & (r = 1), \\ 0 & (-1 < r < 1) \end{cases}$$

となることが分かる. また, $r \leq -1$ または $r > 1$ のとき, $\{r^n\}$ は収束しないことが分かる. 特に, $r > 1$ のとき, $\{r^n\}$ の極限は $+\infty$ である.

注意 5.1　実数列に関して, 等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

がなりたつが, これらは Archimedes の原理とよばれ, 連続の公理と深く関わるものである.

例 5.4 (Napier の数)　有理数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定めると, 連続の公理より, $\{a_n\}$ はある実数に収束することが分かる. $\{a_n\}$ の極限を e と表し, Napier の数または自然対数の底という. e は

$$e = 2.718281828459045 \cdots$$

と表される無理数であることが分かる.

問 5.7　e の値を小数第 15 位まで覚える語呂合わせを答えよ.

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を数列とし, $c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, 5 つの数列 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{ca_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ を定めることができる. ただし, $b_n = 0$ となる $n \in \mathbf{N}$ に対して, $\frac{a_n}{b_n}$ を考えることはできないが, $\{b_n\}$ が収束し, その極限が 0 でなければ, 十分大きい任意の n に対して 5 つめの数列を考えることができる. このようにして得られる数列の極限に関して, 次がなりたつ.

定理 5.4　$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ をそれぞれ極限 α, $\beta \in \mathbf{R}$ に収束する数列とする. このとき, 次の (1)〜(4) がなりたつ.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$. (複号同順)
(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$.
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.
(4) $\beta \neq 0$ のとき, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

問 5.8 次の (1)〜(3) の数列の極限を求めよ.
(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$.
(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{3n-4}$.
(3) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$.

$\mathbf{R}$ については大小関係を考えることができるが, 実数列の極限に関しては, 次もなりたつ.

定理 5.5 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を数列とする. このとき, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) 十分大きい任意の n に対して, $a_n \leq b_n$ がなりたち, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がそれぞれ α, $\beta \in \mathbf{R}$ に収束するならば, $\alpha \leq \beta$ である.
(2) (はさみうちの原理) 十分大きい任意の n に対して, $a_n \leq c_n \leq b_n$ がなりたち, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに $\alpha \in \mathbf{R}$ に収束するならば, $\{c_n\}$ は α に収束する.
(3) (追い出しの原理) 十分大きい任意の n に対して, $a_n \leq b_n$ がなりたつとする. $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散するならば, $\{b_n\}$ は $+\infty$ に発散する. また, $\{b_n\}$ が $-\infty$ に発散するならば, $\{a_n\}$ は $-\infty$ に発散する.

例 5.5 $n \in \mathbf{N}$ とすると, $-1 \leq \sin n \leq 1$ だから,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

である. ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\pm\frac{1}{n}\right) = 0$$

だから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

である.

問 5.9 次の問に答えよ.
(1) 不等式

$$2^n > 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} \quad (n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots)$$

がなりたつことを二項定理を用いることにより示せ.
(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$$

の値を求めよ.