

§6. 関数の極限

ここでは、関数の極限について述べよう。簡単のため、 \mathbf{R} の部分集合で定義された実数値関数のみを考える。まず、 $A \subset \mathbf{R}$ に対して、 $\bar{A} \subset \mathbf{R}$ を A 内の数列の極限となるもの全体の集合とする。すなわち、

$$\bar{A} = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid \text{ある数列 } \{a_n\} \text{ が存在し、任意の } n \in \mathbf{N} \text{ に対して } a_n \in A, \text{ かつ、} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \right\}$$

である。 \bar{A} を A の閉包という。特に、 $A \subset \bar{A}$ がなりたつ。実際、 $a \in A$ のとき、数列 $\{a_n\}$ を $a_n = a$ ($n \in \mathbf{N}$) により定めると、任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \in A$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ だから、 $a \in \bar{A}$ である。

問 6.1 $A \subset B \subset \mathbf{R}$ ならば、 $\bar{A} \subset \bar{B}$ であることを示せ。

\mathbf{R} の部分集合で定義された実数値関数を考える場合、定義域は区間とすることが多い。区間の閉包については、次がなりたつ。

定理 6.1 定義 1.1 で定めた区間 (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, \mathbf{R} に対して、

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} &= \overline{[a, b)} = \overline{(a, b]} = \overline{[a, b]} = [a, b], & \overline{(a, +\infty)} &= \overline{[a, +\infty)} = [a, +\infty), \\ \overline{(-\infty, b)} &= \overline{(-\infty, b]} = (-\infty, b], & \bar{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \end{aligned}$$

である。

問 6.2 定理 6.1 において、 $\overline{[a, b)} = [a, b]$ であることを示せ。

問 6.3 \mathbf{R} の部分集合 \mathbf{Z} および \mathbf{Q} の閉包を求めよ。

それでは、関数の極限を定義しよう。

定義 6.1 $A \subset \mathbf{R}$ を空でない集合、 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ を A で定義された関数とし、 $a \in \bar{A}$ とする。

ある $l \in \mathbf{R}$ が存在し、 $x \in A$ を $x \neq a$ をみたましながら a に十分近づければ、 $f(x)$ を l に限りなく近づけることができるとき、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

または

$$f(x) \rightarrow l \quad (x \rightarrow a)$$

と表し、 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき極限 l に収束するという。

$x \in A$ を $x \neq a$ をみたましながら a に十分近づければ、 $f(x)$ を限りなく大きくできるとき、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

または

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a)$$

と表し、 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき極限 $+\infty$ または正の無限大に発散するという。同様に、極限 $-\infty$ または負の無限大に発散する関数を定めることができる。

注意 6.1 定義 6.1 において、 A が定義 1.1 で定めた区間 (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ の場合、 $x \rightarrow a$ のときの極限を

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

と表し、右極限ともいう。また、 A が定義 1.1 で定めた区間 (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ の場合、 $x \rightarrow b$ のときの極限を

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$$

と表し、左極限ともいう。なお、 $x \rightarrow 0$ のときの右極限、左極限はそれぞれ

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x)$$

とも表す。

数列の極限の場合と同様に、次がなりたつ。

定理 6.2 $A \subset \mathbf{R}$ を空でない集合、 $f, g: A \rightarrow \mathbf{R}$ を A で定義された関数とし、 $a \in \bar{A}$ とする。 $l, m \in \mathbf{R}$ をそれぞれ $f(x), g(x)$ の $x \rightarrow a$ のときの極限とすると、次の (1)~(4) がなりたつ。

(1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$. (複号同順)

(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると、 $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cl$.

(3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = lm$.

(4) $m \neq 0$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

なお、関数の極限を考える際には、特に誤解を生じる心配がなければ、定義域ははっきりと述べないことも多い。

問 6.4 次の関数の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

問 6.5 次の関数の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x-1}$ および $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x-1}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 + x}{|x|}$ および $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 + x}{|x|}$.

関数の極限の概念を用いて、関数の連続性を定めることができる。

定義 6.2 $A \subset \mathbf{R}$ を空でない集合、 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ を A で定義された関数とする。

$a \in A$ に対して、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

がなりたつとき、 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。

任意の $a \in A$ に対して、 $f(x)$ が $x = a$ で連続なとき、 $f(x)$ は A で連続であるという。

例 6.1 $A \subset \mathbf{R}$ を空でない集合とすると、1変数の多項式で表される関数、正弦関数、余弦関数、指数関数は A で連続となる。また、 $A \subset (0, +\infty)$ のとき、対数関数は A で連続となる。

数列の極限の場合と同様に、関数の極限に対しても、はさみうちの原理がなりたつ。

例 6.2 $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ で定義された関数 $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$$

により定める. ここで, $0 \in \mathbf{R} = \overline{\mathbf{R} \setminus \{0\}}$ である. $f(x)$ の $x \rightarrow 0$ のときの極限を求めよう.

まず, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, 半径 1, 中心角 x の扇形の面積を考えると, 不等式

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$$

がなりたつ. すなわち,

$$\cos x < f(x) < 1$$

である. また, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ のとき,

$$\cos(-x) = \cos x, \quad f(-x) = f(x)$$

だから, 上の式は $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のときも成り立つ. ここで, 例 6.1 より,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= \cos 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である. よって, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

である.

問 6.6 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ をはさみうちの原理を用いることにより求めよ.

問 6.7 次の関数の極限を求めよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$A \subset \mathbf{R}$ とする. ある $M \in \mathbf{R}$ が存在し, 任意の $x \in A$ に対して, $x < M$ となるとき, A は上に有界であるという. また, ある $m \in \mathbf{R}$ が存在し, 任意の $x \in A$ に対して, $m < x$ となるとき, A は下に有界であるという. A は上にも下にも有界なとき, 単に有界であるという.

問 6.8 定義 1.1 で定めた区間 (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, \mathbf{R} について, 上に有界なもの, 下に有界なもの, 有界なものをそれぞれ求めよ.

上或いは下に有界でない \mathbf{R} の部分集合で定義された実数値関数については, 次のような極限を考えることもできる.

定義 6.3 $A \subset \mathbf{R}$ を空でない集合, $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ を A で定義された関数とする.

A が上に有界でないとする. ある $l \in \mathbf{R}$ が存在し, $x \in A$ を十分大きくすれば, $f(x)$ を l に限りなく近づけることができるとき,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

または

$$f(x) \rightarrow l \quad (x \rightarrow +\infty)$$

と表し, $f(x)$ は $x \rightarrow +\infty$ のとき, 極限 l に収束するという. また, $x \in A$ を十分大きくすれば, $f(x)$ を限りなく大きくできるとき,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

または

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty)$$

と表し, $f(x)$ は $x \rightarrow +\infty$ のとき, 極限 $+\infty$ または正の無限大に発散するという.

同様に, $x \rightarrow +\infty$ のとき, 極限 $-\infty$ または負の無限大に発散する関数を定めることができる. 更に, A が下に有界でないときは $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を定めることができる.

注意 6.2 $x \rightarrow \pm\infty$ のときの極限についても, 定理 6.2 と同様の事実がなりたつ.

例 6.3 $x > 1$ のとき, $n \in \mathbf{N}$ を $n \leq x < n+1$ となるように選んでおくと, 不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

がなりたつ. ここで, 例 5.4 より,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \\ &= e \cdot 1 \\ &= e \end{aligned}$$

である. 再び, 例 5.4 より,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= e \cdot 1 \\ &= e \end{aligned}$$

である. $x \rightarrow +\infty$ のとき, $n \rightarrow \infty$ だから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

である.

問 6.9 次の等式を示せ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

問 6.10 関数の極限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

をはさみうちの原理を用いることにより求めよ.