

§7. 関数の微分と双曲線関数

関数の極限の概念を用いて、関数の微分を考えることができる。そして、微分可能な関数に対しては、その微分を考えることにより、関数の変化の様子を調べることができる。

以下では、簡単のため I を开区間、無限开区間、 \mathbf{R} の何れかとし、 I で定義された実数値関数 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ を考える。まず、 $a, b \in I$, $a \neq b$ とすると、 x が a から b へと変わるとき、 $f(x)$ は $f(a)$ から $f(b)$ へと変わるが、これらの変化の量の比

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を平均変化率という。平均変化率は関数の変化の様子を知る1つの目安となるが、 $f(x)$ を x で微分するということは、 a と b を限りなく近づけたときの瞬間の変化率を考えることである。

定義 7.1 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ を関数とする。

$a \in I$ とする。極限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \in \mathbf{R}$$

が存在するとき、 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという。このとき、上の極限を $f'(a)$ または $\frac{df}{dx}(a)$ などと表し、 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数という。

$f(x)$ が任意の $a \in I$ で微分可能なとき、 f は I で微分可能であるという。このとき、 I で定義された実数値関数 f' または $\frac{df}{dx}$ を f の導関数という。

問 7.1 $c \in \mathbf{R}$ を固定しておき、関数 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f(x) = c \quad (x \in I)$$

により定める。すなわち、 f は定数関数である。このとき、任意の $x \in I$ に対して、 $f'(x) = 0$ であることを示せ。

微分可能性は連続性よりも強い概念である。すなわち、次がなりたつ。

定理 7.1 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ を関数とし、 $a \in I$ とする。 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、 $f(x)$ は $x = a$ で連続である。

問 7.2 定理 7.1 を示せ。

問 7.3 関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f(x) = |x| \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める。このとき、 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能ではないことを示せ。特に、関数は連続であったとしても微分可能であるとは限らない。

$x \in \mathbf{R}$ に対して、 x^n ($n \in \mathbf{N}$), $\sin x$, $\cos x$, e^x を対応させることにより、 \mathbf{R} で連続な関数が得られるが、これらをそのまま x^n , $\sin x$, $\cos x$, e^x と表すことにする。このとき、次がなりたつ。

定理 7.2 次の (1)~(4) が成り立つ。

- (1) $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- (2) $(\sin x)' = \cos x$.
- (3) $(\cos x)' = -\sin x$.

$$(4) (e^x)' = e^x.$$

証明 (1), (2) のみ示す.

(1): 二項定理より,

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{({}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} h + {}_n C_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + {}_n C_n h^n) - x^n\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \right\} \\ &= n x^{n-1} \end{aligned}$$

である. よって, (1) がなりたつ.

(2): 例 6.2 より,

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \cos \frac{(x+h)+x}{2} \sin \frac{(x+h)-x}{2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

である. よって, (2) がなりたつ. □

問 7.4 次の問に答えよ.

- (1) 定理 7.2 (3) を示せ.
- (2) 定理 7.2 (4) を示せ.

$f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$ を関数とし, $c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, 5つの関数

$$f + g, f - g, cf, fg, \frac{f}{g}: I \rightarrow \mathbf{R}$$

を定めることができる. ただし, $\frac{f}{g}$ については, 任意の $x \in I$ に対して $g(x) \neq 0$ であるとする. このようにして得られる関数の微分に関して, 次のとおりになることが分かる.

定理 7.3 $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$ を I で微分可能な関数とする. このとき, 次の (1)~(4) が成り立つ.

- (1) $(f \pm g)' = f' \pm g'$. (複号同順)
- (2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $(cf)' = cf'$.
- (3) $(fg)' = f'g + fg'$. (積の微分法)
- (4) 任意の $x \in I$ に対して $g(x) \neq 0$ のとき, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. (商の微分法)

問 7.5 \mathbf{R} で定義された関数

$$2x + \sin x - e^x \cos x$$

の導関数を求めよ.

問 7.6 $f, g, h : I \rightarrow \mathbf{R}$ を I で微分可能な関数とする. このとき, 等式

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

がなりたつことを示せ.

例 7.1 方程式

$$\cos x = 0$$

の解は

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbf{Z})$$

であるから, $A \subset \mathbf{R}$ を

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbf{Z}) \right\}$$

により定めると, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ は A で連続な関数となる. 更に, A は开区間, 無限开区間, \mathbf{R} の何れでもないが, $\tan x$ は A で微分可能であり, 定理 7.2 (2), (3) および商の微分法より, $x \in A$ とすると,

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

である.

問 7.7 商の微分法を用いることにより, 次の等式を示せ.

$$(1) \left(\frac{1}{x^n} \right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}. \text{ ただし, } n \in \mathbf{N} \text{ である.}$$

$$(2) (e^{-x})' = -e^{-x}.$$

指数関数を用いて, \mathbf{R} で連続な関数 $\cosh x, \sinh x$ を

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. $\cosh x, \sinh x$ をそれぞれ双曲線余弦関数, 双曲線正弦関数という. また, これらをまとめて双曲線関数という. 三角関数の場合と同様に, $(\cosh x)^2$ などを $\cosh^2 x$ のように表すことが多い. 双曲線関数は三角関数と同様の公式をみだが, 符号が異なることもあるので, 注意する必要がある.

問 7.8 双曲線関数について, 次の問に答えよ.

(1) 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して, 等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ がなりたつことを示せ.

(2) 「双曲線関数」という言葉を用いる理由を答えよ.

(3) $x, y \in \mathbf{R}$ とすると, 加法定理

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

がなりたつことを示せ.

定理 7.2 (4), 定理 7.3 (1), (2), 問 7.7 (2) より, 次がなりたつ.

定理 7.4 $\cosh x, \sinh x$ は \mathbf{R} で微分可能であり,

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

がなりたつ.

問 7.9 定理 7.4 を示せ.

問 7.10 \mathbf{R} で連続な関数 $\tanh x$ を

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定め, これを双曲線正接関数という. 次の等式を示せ.

$$(1) 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$(2) (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

I に加え, J も開区間, 無限開区間, \mathbf{R} の何れかであるとし, $f: I \rightarrow \mathbf{R}, g: J \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(I) \subset J$ をみたす関数とする. このとき, f と g の合成関数 $g \circ f: I \rightarrow \mathbf{R}$ を考えることができる. すなわち,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in I)$$

である. 合成関数の微分に関して, 次がなりたつことが分かる.

定理 7.5 (合成関数の微分法) $f: I \rightarrow \mathbf{R}, g: J \rightarrow \mathbf{R}$ をそれぞれ I, J で微分可能な関数とし, $f(I) \subset J$ であるとする. このとき, 任意の $x \in I$ に対して,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

がなりたつ.

問 7.11 次の (1), (2) の関数の導関数を求めよ.

(1) e^{ax^2+bx+c} . ただし, $a, b, c \in \mathbf{R}$ は定数である.

(2) $\sin \cosh x + \cosh \sin x$.

問 7.12 $n \in \mathbf{N}$ とし, 関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める.

(1) f は \mathbf{R} で連続であることを示せ.

(2) f が \mathbf{R} で微分可能となるための n の条件を求め, 更に, f が \mathbf{R} で微分可能となるときの f の導関数を求めよ.

(3) f が \mathbf{R} で微分可能となるとき, f の導関数が \mathbf{R} で連続となるための n の条件を求めよ.