§2. ノルム空間

ノルム空間は距離空間の例となる．ここでは, $\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし, $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間を考え, 次のように定めよう．

定義 2.1 V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする．関数 $\|\ \| : V \to \mathbf{R}$ が任意の $x, y \in V$ に対して, 次の (1)〜(3) をみたすとき, $\|\ \|$ を V のノルム, $\|x\|$ を x のノルムという．また, 組 $(V, \|\ \|)$ または単に V をノルム空間という．

(1) 任意の $x \in V$ に対して, $\|x\| \geq 0$ であり, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限る．(正値性)

(2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $x \in V$ に対して, $\|cx\| = |c|\|x\|$.

(3) 任意の $x, y \in V$ に対して, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (三角不等式)

例 2.1 (内積空間) $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積空間とし, 関数 $\|\ \| : V \to \mathbf{R}$ を

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in V)$$

により定める．このとき, $\|\ \|$ は V のノルムとなる．すなわち, $(V, \|\ \|)$ はノルム空間である．

注意 2.1 内積空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ から定められるノルム $\|\ \|$ に関して, 中線定理

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (x, y \in V)$$

がなりたつ．

逆に, $(V, \|\ \|)$ を中線定理がなりたつノルム空間とする．このとき, 関数 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ を

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (x, y \in V)$$

により定めると, $\langle\ ,\ \rangle$ は V の内積となり, 更に, $\langle\ ,\ \rangle$ から定められるノルムは $\|\ \|$ であることが分かる．

例 2.2 有界閉区間 $[0, 1]$ で定義された実数値連続関数全体の集合を $C[0, 1]$ と表すことにする．$f, g \in C[0, 1]$ とすると, f と g の和 $f + g \in C[0, 1]$ を

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad (t \in [0, 1])$$

により定めることができる．更に, $c \in \mathbf{R}$ とすると, f の c によるスカラー倍 $cf \in C[0, 1]$ を

$$(cf)(t) = cf(t) \quad (t \in [0, 1])$$

により定めることができる．このとき, $C[0, 1]$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となる．

ここで, 関数 $\|\ \| : C[0, 1] \to \mathbf{R}$ を

$$\|f\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \quad (f \in C[0, 1])$$

により定めることができる．このとき, $\|\ \|$ は $C[0, 1]$ のノルムとなることが分かる．すなわち, $(C[0, 1], \|\ \|)$ はノルム空間である．

次の定理より, ノルム空間は距離空間となる．

定理 2.1 $(V, \|\ \|)$ をノルム空間とし, 関数 $d : V \times V \to \mathbf{R}$ を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

により定める. このとき, d は V の距離となる. すなわち, (V,d) は距離空間である.

証明　次の (1)〜(3) がなりたつことを示せばよい.

(1) 任意の $x,\ y\in V$ に対して, $d(x,y)\geq 0$ であり, $d(x,y)=0$ となるのは $x=y$ のときに限る.
(2) 任意の $x,\ y\in V$ に対して, $d(x,y)=d(y,x)$.
(3) 任意の $x,\ y,\ z\in V$ に対して, $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

(1): ノルムの正値性より,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

である. また, $d(x,y)=0$ となるのは

$$\|x-y\|=0$$

となるとき, すなわち, $x-y=0$ より, $x=y$ のときに限る.
(2): 定義 2.1 の (2) より,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|(-1)(y-x)\| \\ &= |-1|\|y-x\| \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

である. すなわち, (2) がなりたつ.
(3): ノルムに対する三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x-z\| \\ &= \|(x-y)+(y-z)\| \\ &\leq \|x-y\|+\|y-z\| \\ &= d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

である. すなわち, (3) がなりたつ. □

以下, ノルム空間に対しては, 定理 2.1 の距離から定められる位相を考える. 例えば, ノルム空間 $(V,\|\ \|)$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x\in V$ に収束するとは,

$$\|x_n-x\|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

がなりたつことである. このとき, 直積距離空間 $V\times V$ を考えることができる. また, $\mathbf{R}$ の Euclid 距離を考えると, 直積距離空間 $\mathbf{R}\times V$ を考えることができる. 更に, 次がなりたつ.

定理 2.2　$(V,\|\ \|)$ をノルム空間とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) 和が定める写像 $V\times V\to V$ は連続である.
(2) スカラー倍が定める写像 $\mathbf{R}\times V\to V$ は連続である.
(3) 関数 $\|\ \|: V\to\mathbf{R}$ は連続である.

証明 (1): $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $x \in V$ に収束する V の点列とする．また, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $y \in V$ に収束する V の点列とする．ノルムに対する三角不等式より, $n \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}\|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \\ &\to 0 + 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

すなわち,

$$x_n + y_n \to x + y \quad (n \to \infty)$$

である．よって, (1) がなりたつ．

(2): $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $c \in \mathbf{R}$ に収束する $\mathbf{R}$ の点列とする．また, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $x \in V$ に収束する V の点列とする．ノルムの性質より, $n \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}\|c_n x_n - cx\| &= \|(c_n - c)(x_n - x) + (c_n - c)x + c(x_n - x)\| \\ &\leq \|(c_n - c)(x_n - x)\| + \|(c_n - c)x\| + \|c(x_n - x)\| \\ &= |c_n - c|\|x_n - x\| + |c_n - c|\|x\| + |c|\|x_n - x\| \\ &\to 0 \cdot 0 + 0 \cdot \|x\| + |c| \cdot 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

すなわち,

$$c_n x_n \to cx \quad (n \to \infty)$$

である．よって, (2) がなりたつ．

(3): $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $x \in V$ に収束する V の点列とする．まず, ノルムに対する三角不等式より,

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \|x + (x_n - x)\| \\ &\leq \|x\| + \|x_n - x\|,\end{aligned}$$

すなわち,

$$\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$

である．同様に,

$$\|x\| - \|x_n\| \leq \|x_n - x\|$$

である．よって, $n \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}|\|x_n\| - \|x\|| &\leq \|x_n - x\| \\ &\to 0,\end{aligned}$$

すなわち,

$$\|x_n\| \to \|x\| \quad (n \to \infty)$$

である．したがって, (3) がなりたつ． □

問題 2

1. $p \geq 1$ とする.

(1) $a,\, b \in \mathbf{R}$ とすると, 不等式

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

がなりたつことを示せ.

(2) 集合 l^p を

$$l^p = \left\{ \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty \text{ となる実数列} \right\}$$

により定め, $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ とする. 実数列 $x+y$ を

$$x + y = \{\xi_n + \eta_n\}_{n=1}^{\infty}$$

により定めると, $x + y \in l^p$ であることを示せ.

更に, $c \in \mathbf{R}$ とし, 実数列 cx を

$$cx = \{c\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$$

により定めると, $cx \in l^p$ となり, l^p は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となることが分かる. l^p を数列空間という.

(3) $p > 1$ とし, $q > 1$ を

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{$*$}$$

により定める. $a,\, b > 0$ とすると, 不等式

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

がなりたつことを示せ.

(4) $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ に対して,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおく.

$p > 1$ とし, $q > 1$ を $(*)$ により定める. $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$, $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^q$ とすると, 不等式

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

がなりたつことを示せ. この不等式を Hölder の不等式という.

(5) $\|\ \|_p$ は三角不等式をみたすこと示せ. この三角不等式を Minkowski の不等式という.

更に, $\|\ \|$ は l^p のノルムとなることが分かる. すなわち, $(l^p, \|\ \|_p)$ はノルム空間である.

問題 2 の解答

1. (1) $t \geq 0$ のとき, 関数 t^p は下に凸である. よって,

$$\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^p \leq \frac{|a|^p+|b|^p}{2},$$

すなわち,

$$(|a|+|b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$$

である. したがって, 絶対値に対する三角不等式と合わせると, あたえられた不等式がなりたつ.

(2) $x, y \in l^p$ および (1) より,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}2^{p-1}(|\xi_n|^p+|\eta_n|^p)\\ &= 2^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p+2^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\\ &< +\infty\end{aligned}$$

である. よって, $x+y \in l^p$ である.

(3) $t > 0$ のとき, 関数 $\log t$ は上に凸である. よって,

$$\frac{\frac{1}{p}\log a+\frac{1}{q}\log b}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \log\frac{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}},$$

すなわち,

$$\log a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \leq \log\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)$$

である. よって, あたえられた不等式がなりたつ.

(4) まず, $x=0$, すなわち, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $\xi_n = 0$ のとき, Hölder の不等式がなりたつ. ただし, $\mathbf{N}$ は自然数全体の集合である. 同様に, $y=0$ のとき, Hölder の不等式がなりたつ.

次に, $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ とする. このとき, $\|x\|_p > 0$, $\|y\|_q > 0$ であることに注意し, $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$a_n = \frac{|\xi_n|^p}{\|x\|_p^p}, \quad b_n = \frac{|\eta_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

とおく. (3) より,

$$\frac{|\xi_n|}{\|x\|_p}\frac{|\eta_n|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|\xi_n|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|\eta_n|^q}{\|x\|_q^q}$$

である. $m \in \mathbf{N}$ とすると, 絶対値に対する三角不等式より,

$$\frac{1}{\|x\|_p\|y\|_q}\left|\sum_{n=1}^{m}\xi_n\eta_n\right| \leq \frac{1}{p\|x\|_p^p}\sum_{n=1}^{m}|\xi_n|^p+\frac{1}{q\|y\|_q^q}\sum_{n=1}^{m}|\eta_n|^q$$

である. よって, $m \to \infty$ とすると,

$$\frac{1}{\|x\|_p\|y\|_q}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n\right| \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$
$$= 1,$$

となり, Hölder の不等式がなりたつ.

(5) $p=1$ のとき, 絶対値に対する三角不等式より, Minkowski の不等式がなりたつ.

$p>1$ のとき, $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y=\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^p$ とする. $x+y=0$ のとき, Minkowski の不等式がなりたつ. $x+y\neq 0$ のとき, $q>1$ を $(*)$ により定めると, 絶対値に対する三角不等式および Hölder の不等式より,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p &\le \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^{p-1}|\xi_n| + \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^{p-1}|\eta_n| \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\end{aligned}$$

である. ここで, $x+y\neq 0$ より,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p > 0$$

である. よって, Minkowski の不等式がなりたつ.