§7. 代数的構造

ここでは, 実数値連続関数全体の集合の代数的構造について述べていこう. X を位相空間とし, $f, g \in C(X)$, $c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, 定理 4.1, 問題 4-1 で述べたように, $f+g$, cf, $fg \in C(X)$ が定められるのであった. このような和, スカラー倍, 積といった演算に注目し, 次のように定める.

定義 7.1　A を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とし, $x, y \in A$ に対して, 積 $xy \in A$ を対応させる写像 $A \times A \to A$ があたえられているとする. 次の (1)〜(3) がなりたつとき, A を $\mathbf{R}$ 上の多元環という.

(1) 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(x+y)z = xz + yz$, $x(y+z) = xy + xz$. (分配律)

(2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $x, y \in A$ に対して, $(cx)y = c(xy) = x(cy)$.

(3) 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(xy)z = x(yz)$. (結合律)

例 7.1　X を位相空間とすると, $C(X)$ は $\mathbf{R}$ 上の多元環である.

例 7.2　まず, $\mathbf{R}^2$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間である. ここで, (a,b), $(c,d) \in \mathbf{R}^2$ に対して, $(a,b)(c,d) \in \mathbf{R}^2$ を

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

により定める. このとき, $\mathbf{R}^2$ は $\mathbf{R}$ 上の多元環となることが分かる. この多元環は複素数全体の集合に通常の四則演算を考えたものに他ならない.

更に, 多元環の構造をもつような多元環の部分集合を考え, 次のように定める.

定義 7.2　A を $\mathbf{R}$ 上の多元環とし, B を A の部分集合とする. 次の (1), (2) がなりたつとき, B を A の部分多元環という.

(1) B はベクトル空間としての A の部分空間である.

(2) 任意の $x, y \in B$ に対して, $xy \in B$.

注意 7.1　定義 7.2 において, 部分多元環は $\mathbf{R}$ 上の多元環となる. また, ベクトル空間の部分空間の性質より, B が A の部分多元環であるとは, B が空ではなく, 任意の $x, y \in B$ および任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して, $x+y$, cx, $xy \in B$ となることと同値である.

例 7.3　S を多項式として表される $C(\mathbf{R})$ の元全体の集合とする. このとき, S は $C(\mathbf{R})$ の部分多元環である.

一方, $n \in \mathbf{N}$ を固定しておき, T を n 次以下の多項式として表される $C(\mathbf{R})$ の元全体の集合とする. このとき, T は $C(\mathbf{R})$ の部分多元環ではない. 実際, 2 つの n 次多項式の積は $2n$ 次となってしまうからである.

例 7.4　例 7.2 において, $X \subset \mathbf{R}^2$ を

$$X = \{(a,0) \,|\, a \in \mathbf{R}\}$$

により定める. このとき, X は $\mathbf{R}^2$ の部分多元環となる. X は $\mathbf{R}$ に通常の四則演算を考えたものと同一視することができる.

一方, $Y \subset \mathbf{R}^2$ を

$$Y = \{(0,a) \,|\, a \in \mathbf{R}\}$$

により定める． このとき, Y は $\mathbf{R}^2$ の部分多元環ではない． 実際, $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ とすると, $(0, a)$, $(0, b) \in Y$ であるが,

$$\begin{aligned}(0,a)(0,b) &= (0 \cdot 0 - ab, 0 \cdot b + a \cdot 0)\\ &= (-ab, 0)\\ &\notin Y\end{aligned}$$

となるからである．

以下では, $C(X)$ の一様収束位相を考える．まず, 次がなりたつ．

定理 7.1 X をコンパクト空間, S を $C(X)$ の部分多元環とすると, $\overline{S}$ は $C(X)$ の部分多元環である．

証明 $f, g \in \overline{S}$ とする．このとき, 閉包の性質より, S の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} d(g_n, g) = 0$$

となるように選んでおくことができる．

まず, S は $C(X)$ の部分多元環だから, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $f_n + g_n \in S$ である．また, $x \in X$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned}|(f_n + g_n)(x) - (f+g)(x)| &= |(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x))|\\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|\end{aligned}$$

である．よって,

$$\begin{aligned}d(f_n + g_n, f+g) &\leq d(f_n, f) + d(g_n, g)\\ &\to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となるから,

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n + g_n, f+g) = 0$$

である．したがって, $f + g \in \overline{S}$ である．

次に, S は $C(X)$ の部分多元環だから, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $cf_n \in S$ である．また, $x \in X$ とすると,

$$|(cf_n)(x) - (cf)(x)| = |c||f(x) - f_n(x)|$$

である．よって,

$$\begin{aligned}d(cf_n, cf) &= |c|\, d(f_n, f)\\ &\to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となるから,

$$\lim_{n\to\infty} d(cf_n, cf) = 0$$

である．したがって, $cf \in \overline{S}$ である．

更に, S は $C(X)$ の部分多元環だから, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $f_n g_n \in S$ である. また, $x \in X$ とすると,

$$\begin{aligned} |(f_n g_n)(x) - (fg)(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| \\ &\leq (|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|)|g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

である. ここで, X はコンパクトであり, $f \in C(X)$ だから,

$$\|f\| = \max\{|f(x)| \,|\, x \in X\} \in \mathbf{R}$$

である. $\|g\|$ についても同様である. よって,

$$\begin{aligned} d(f_n g_n, fg) &\leq (d(f_n, f) + \|f\|)d(g_n, g) + \|g\|d(f_n, f) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

となるから,

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n g_n, fg) = 0$$

である. したがって, $fg \in \overline{S}$ である.

以上および注意 7.1 より, $\overline{S}$ は $C(X)$ の部分多元環である. □

また, 次がなりたつ.

定理 7.2 X をコンパクト空間, S を $C(X)$ の部分多元環とする. $f \in S$ ならば, $|f| \in \overline{S}$ である.

証明 $\|f\| = 0$, すなわち, $f = 0$ のときは明らかである.

$\|f\| > 0$ とする. 問題 5-3 のように, g_n, $g \in C[0,1]$ $(n \in \mathbf{N})$ を

$$\begin{cases} g_1(t) = 0, \\ g_{n+1}(t) = g_n(t) + \dfrac{t - (g_n(t))^2}{2}, \end{cases} \qquad g(t) = \sqrt{t} \quad (t \in [0,1])$$

により定める. このとき, $f_n \in C(X)$ を

$$f_n(x) = g_n\left(\left(\frac{f(x)}{\|f\|}\right)^2\right) \quad (x \in X)$$

により定める. g_n は実数係数の多項式として表され, S は $C(X)$ の部分多元環だから, $f_n \in S$ である. また, 問題 5-3 より, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ は g に一様収束するから, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $\dfrac{1}{\|f\|}|f|$ に一様収束する. よって,

$$\frac{1}{\|f\|}|f| \in \overline{S}$$

である. 更に, 定理 7.1 より,

$$\begin{aligned} |f| &= \|f\|\left(\frac{1}{\|f\|}|f|\right) \\ &\in \overline{S} \end{aligned}$$

である. □

問題 7

1. 2 次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbf{R})$ と表す．このとき, $M_2(\mathbf{R})$ は通常の和, スカラー倍および積によって, $\mathbf{R}$ 上の多元環となる．ここで, $A \subset M_2(\mathbf{R})$ を

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

により定める．A は $M_2(\mathbf{R})$ の部分多元環であることを示せ．

2. $f, g \in C(\mathbf{R})$ に対して, $f * g \in C(\mathbf{R})$ を

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める．$f * g$ を f と g の畳み込みという．このとき, 置換積分法より,

$$f * g = g * f$$

であることが分かる．更に, $h \in C(\mathbf{R})$ とすると,

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

であることを示せ．なお, $C(\mathbf{R})$ を通常の和とスカラー倍によって, $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とみなし, 更に, 畳み込みを積とすることにより, $C(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上の多元環となる．

3. X を第一可算公理をみたす位相空間, A を X の空でない部分集合とし, $a \in \overline{A}$ とする．このとき, a に収束する A の点列が存在することを示せ．

4. X を可算集合とし, X の余可算位相を考える．すなわち, $\mathfrak{O}$ を X の開集合系とすると,

$$\mathfrak{O} = \{O \subset X \mid X \setminus O \text{ は高々可算}\} \cup \{\emptyset\}$$

である．$A \subset X$ が非可算なとき, $\overline{A} = X$ であることを示せ．なお, $A \neq X$ のとき, $a \in X \setminus A$ とすると, a に収束する A の点列は存在しないことが分かる．

5. X をコンパクト空間とする．また, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ とし, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C(X)$ に対して,

$$\max(f_1, f_2 \ldots, f_n)(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \quad (x \in X)$$

とおく．

(1) $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C(X)$ となることを示せ．同様に,

$$\min(f_1, f_2 \ldots, f_n)(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \quad (x \in X)$$

とおくと, $\min(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C(X)$ となる．

(2) S を $C(X)$ の部分多元環とする．$f_1, f_2, \ldots, f_n \in S$ ならば, $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{S}$ となることを示せ．同様に, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S$ ならば, $\min(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{S}$ となる．

問題 7 の解答

1. $X, Y \in A$ とし,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \quad (a,\, b,\, c,\, d \in \mathbf{R})$$

と表しておく.

まず,

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \\ &\in A \end{aligned}$$

である.

次に, $k \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} kX &= k \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ka & kb \\ -kb & ka \end{pmatrix} \\ &\in A \end{aligned}$$

である.

更に,

$$\begin{aligned} XY &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad+bc) & ac - bd \end{pmatrix} \\ &\in A \end{aligned}$$

である.

以上および注意 7.1 より, A は $M_2(\mathbf{R})$ の部分多元環である.

2. $t \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} ((f*g)*h)(t) &= (h*(g*f))(t) \\ &= \int_0^t h(t-s)(g*f)(s)\,ds \\ &= \int_0^t h(t-s)\left(\int_0^s g(s-r)f(r)\,dr\right) ds \\ &= \int_{\{(r,s)|0 \le r \le s \le t\}} f(r)g(s-r)h(t-s)\,drds \\ &= \int_0^t f(r)\left(\int_r^t h(t-s)g(s-r)\,ds\right) dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t f(r)\left(\int_0^{t-r} h(t-r-u)g(u)\,du\right)dr \\
&= \int_0^t f(r)(h*g)(t-r)\,dr \\
&= ((h*g)*f)(t) \\
&= (f*(g*h))(t)
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$
(f*g)*h = f*(g*h)
$$

である.

3. X は第一可算公理をみたすから, a のある可算基本近傍系 $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が存在し,

$$
U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots
$$

となる. 閉包の定義より, a は A の外点ではないから, 各 $n\in\mathbf{N}$ に対して, $a_n \in U_n \cap A$ を選んでおくことができる. ここで, O を $a\in O$ となる X の開集合とすると, 基本近傍系の定義より, ある $N\in\mathbf{N}$ が存在し, $U_N \subset O$ となる. 更に, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq N$ ならば,

$$
\begin{aligned}
a_n &\in U_n \\
&\subset U_N \\
&\subset O,
\end{aligned}
$$

すなわち, $a_n\in O$ である. よって, A の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は a に収束する.

4. F を $A\subset F$ となる X の閉集合とする. 余可算位相の定義より, F は高々可算であるか, または, $F=X$ である. ここで, A は非可算だから, $F=X$ である. よって, $\overline{A}=X$ である.

5. (1) n に関する数学的帰納法により示す.

$n=2$ のとき, $f_1,\ f_2\in C(X)$ だから,

$$
\begin{aligned}
\max(f_1,f_2) &= \frac{1}{2}\{(f_1+f_2)+|f_1-f_2|\} \\
&\in C(X)
\end{aligned}
$$

である.

$n=k\ (k\geq 2)$ のとき, 題意がなりたつと仮定する. このとき, $\max(f_2,\dots,f_{k+1})\in C(X)$ となるから,

$$
\begin{aligned}
\max(f_1,f_2,\dots,f_{k+1}) &= \max(f_1,\max(f_2,\dots,f_{k+1})) \\
&\in C(X)
\end{aligned}
$$

である. よって, $n=k+1$ のとき, 題意がなりたつ.

したがって, 題意がなりたつ.

(2) (1) の証明および定理 7.1, 定理 7.2 より, 題意がなりたつ.