§12. コンパクト開位相

位相空間の間の連続写像全体の集合にはコンパクト開位相という位相を考えることができる.

定義 12.1 X, Y を位相空間とし, X から Y への連続写像全体の集合を $C(X,Y)$ と表す. また, $A \subset X$ および $B \subset Y$ に対して,

$$W(A,B) = \{f \in C(X,Y) \mid f(A) \subset B\}$$

とおく. 更に,

$$\mathfrak{M} = \{W(A,B) \mid A \text{ はコンパクトであり}, B \text{ は } X \text{ の開集合 }\}$$

とおく. $\mathfrak{M}$ により生成される $C(X,Y)$ の位相, すなわち, $\mathfrak{M}$ を含む $C(X,Y)$ の位相全体の中で最も小さいものをコンパクト開位相という.

まず, 次がなりたつ.

定理 12.1 X, Y を位相空間とする. $A \subset X$ とし, B を Y の閉集合とすると, コンパクト開位相に関して, $W(A,B)$ は $C(X,Y)$ の閉集合である.

証明 de Morgan の法則より,

$$\begin{aligned} W(A,B)^c &= \left(\bigcap_{a\in A} W(\{a\},B)\right)^c \\ &= \bigcup_{a\in A} W(\{a\},B)^c \\ &= \bigcup_{a\in A} W(\{a\},B^c) \end{aligned}$$

である. ここで, $\{a\}$ はコンパクトである. また, B は Y の閉集合だから, B^c は Y の開集合である. よって, コンパクト開位相に関して, $W(\{a\},B^c)$ は $C(X,Y)$ の開集合である. したがって, $W(A,B)^c$ は $C(X,Y)$ の開集合である. すなわち, $W(A,B)$ は $C(X,Y)$ の閉集合である. □

更に, H を $C(X,Y)$ の空でない部分集合とし, 写像 $\Phi_H : H \times X \to Y$ を

$$\Phi_H(f,x) = f(x) \quad (f \in H,\ x \in X)$$

により定める. H に位相をあたえたとき, $H \times X$ の積位相を考え, Φ_H の連続性との関係を考えよう. まず, 次がなりたつ.

定理 12.2 H の離散位相に関して, Φ_H は連続である.

証明 O を Y の開集合とすると,

$$\begin{aligned} \Phi_H^{-1}(O) &= \{(f,x) \in H \times X \mid f(x) \in O\} \\ &= \bigcup_{f\in H} \left(\{f\} \times f^{-1}(O)\right) \end{aligned}$$

である. ここで, H の離散位相に関して, $\{f\}$ は H の開集合である. また, O は Y の開集合であり, f は連続だから, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である. よって, $\Phi_H^{-1}(O)$ は $H \times X$ の開集合である. したがって, Φ_H は連続である. □

$C(X,Y)$ のコンパクト開位相に関する H の相対位相を H のコンパクト開位相という.

ここで, 局所コンパクト性について, 幾つか思い出しておこう.

定義 12.2 X を位相空間とする. 任意の $x \in X$ に対して, x のコンパクトな近傍が存在するとき, X は局所コンパクトであるという.

定理 12.3 X を局所コンパクト Hausdorff 空間とすると, 任意の $x \in X$ に対して, x のコンパクトな近傍全体の集合は x の基本近傍系となる.

それでは, 次を示そう.

定理 12.4 X を局所コンパクト Hausdorff 空間, Y を位相空間, H を $C(X,Y)$ の空でない部分集合とする. このとき, H のコンパクト開位相に関して, Φ_H は連続である.

証明 O を Y の開集合とする. $\Phi_H^{-1}(O) \neq \emptyset$ とし, $\Phi_H^{-1}(O)$ が $H \times X$ の開集合であることを示せばよい.

$(f,x) \in \Phi_H^{-1}(O)$ とする. Φ_H の定義より, $f(x) \in O$ である. よって, O は $f(x)$ の近傍である. 更に, f は連続だから, $f^{-1}(O)$ は x の近傍である. ここで, 定理 12.3 より, x のあるコンパクトな近傍 K が存在し, $K \subset f^{-1}(O)$, すなわち, $f(K) \subset O$ となる. このとき,

$$\begin{aligned}(f,x) &\in (H \cap W(K,O)) \times K \\ &\subset \Phi_H^{-1}(O)\end{aligned}$$

となるから, (f,x) は $\Phi_H^{-1}(O)$ の内点である. (f,x) は任意だから, $\Phi_H^{-1}(O)$ は $H \times X$ の開集合である. □

更に, 次を用意しておこう.

定理 12.5 X, Y を位相空間, K を X のコンパクト部分集合, L を Y のコンパクト部分集合, O を $K \times L \subset O$ となる積空間 $X \times Y$ の開集合とする. このとき, X のある開集合 U および Y のある開集合 V が存在し,

$$K \subset U, \quad L \subset V, \quad U \times V \subset O$$

となる.

証明 $(x,y) \in K \times L$ とする. $K \times L \subset O$ より, $(x,y) \in O$ であり, O は $X \times Y$ の開集合だから, X のある開集合 $U_{(x,y)}$ および Y のある開集合 $V_{(x,y)}$ が存在し,

$$(x,y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset O$$

となる. このとき,

$$\{x\} \times L \subset \bigcup_{y \in L} (U_{(x,y)} \times V_{(x,y)})$$

であり,

$$\{U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \,|\, y \in L\}$$

は $\{x\} \times L$ の開被覆である. また, $\{x\}$, L はコンパクトだから, $\{x\} \times L$ はコンパクトである. よって, ある $y_1, y_2, \ldots, y_n \in L$ が存在し,

$$\{x\} \times L \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{(x,y_i)} \times V_{(x,y_i)})$$

となる. ここで,

$$U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{(x,y_i)}, \quad V_x = \bigcup_{i=1}^{n} V_{(x,y_i)}$$

とおく．このとき, U_x は X の開集合, V_x は Y の開集合であり,

$$\{x\} \times L \subset U_x \times V_x \subset O$$

である．更に,

$$K \times L \subset \bigcup_{x \in K} (U_x \times V_x)$$

となり,

$$\{U_x \times V_x \,|\, x \in K\}$$

は $K \times L$ の開被覆である．また, K, L はコンパクトだから, $K \times L$ はコンパクトである．したがって, ある $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ が存在し,

$$K \times L \subset \bigcup_{j=1}^{m} (U_{x_j} \times V_{x_j})$$

となる．以上より,

$$U = \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}, \quad V = \bigcap_{j=1}^{m} V_{x_j}$$

とおけばよい． □

最後に, 次を示そう．

定理 12.6 X, Y を位相空間, H を $C(X,Y)$ の空でない部分集合とする．H のコンパクト開位相は Φ_H が連続となる H の位相のうち最も小さい．

証明 K を X のコンパクト部分集合, O を Y の開集合とし,

$$f \in W(K,O) \cap H$$

とする．このとき,

$$\{f\} \times K \subset \Phi_H^{-1}(O)$$

である．Φ_H が連続なとき, $\Phi_H^{-1}(O)$ は $H \times X$ の開集合である．ここで, $\{f\}$, K はコンパクトだから, 定理 12.5 より, H のある開集合 U および X のある開集合 V が存在し,

$$\{f\} \subset U, \quad K \subset V, \quad U \times V \subset \Phi_H^{-1}(O)$$

となる．このとき, $g \in U$ とすると,

$$\begin{aligned} g(K) &= \Phi_H(\{g\} \times K) \\ &\subset \Phi_H(U \times V) \\ &\subset O, \end{aligned}$$

すなわち, $g(K) \subset O$ である．よって,

$$U \subset W(K,O) \cap H$$

となるから, 相対位相の定義より, $W(K,O) \cap H$ は H の開集合である．したがって, H の位相はコンパクト開位相より大きい． □

問題 12

1. X, Y を位相空間とし, $C(X,Y)$ のコンパクト開位相を考える. Y が Hausdorff ならば, $C(X,Y)$ は Hausdorff であることを示せ.

2. X を位相空間とする. このとき, $C(X)$ の一様収束位相を考えることができる. また, $C(X) = C(X, \mathbf{R})$ だから, $C(X)$ のコンパクト開位相を考えることができる.
(1) $C(X)$ の一様収束位相はコンパクト開位相より大きいことを示せ.
(2) X がコンパクトならば, $C(X)$ の一様収束位相とコンパクト開位相は一致することを示せ.

3. X を Hausdorff 空間, A を X の局所コンパクトな部分空間とする. このとき, X のある開集合 O および閉集合 B が存在し,

$$A = O \cap B$$

となることを示せ.

問題 12 の解答

1. f, $g \in C(X, Y)$, $f \neq g$ とする．このとき，ある $x \in X$ が存在し，$f(x) \neq g(x)$ となる．ここで，Y は Hausdorff だから，Y のある開集合 U, V が存在し，

$$f(x) \in U, \quad g(x) \in V, \quad U \cap V = \emptyset$$

となる．このとき，$W(\{x\}, U)$, $W(\{y\}, V)$ はそれぞれ f, g の開近傍である．更に，

$$W(\{x\}, U) \cap W(\{x\}, V) = \emptyset$$

である．よって，$C(X, Y)$ は Hausdorff である．

2. (1) K を X のコンパクト部分集合，O を $\mathbf{R}$ の開集合とする．一様収束位相に関して，$W(K, O)$ が $C(X)$ の開集合であることを示せばよい．

まず，$y \in \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ とし，

$$d(y, A) = \inf\{|y - a| \mid a \in A\}$$

とおく．このとき，問題 9-1 より，$d(y, A) = 0$ と $y \in \overline{A}$ は同値であり，関数 $d(\,\cdot\,, A) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は連続である．ここで，$f \in W(K, O)$ とし，

$$\varepsilon = \inf\{d(f(x), O^c) \mid x \in K\}$$

とおく．$f \in W(K, O)$ より，$x \in K$ のとき，$f(x) \in O$ である．また，f は連続であり，K はコンパクトである．よって，$\varepsilon > 0$ となる．

次に，一様収束位相に関して，$g \in B\left(f; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とする．また，$x \in K$ とする．このとき，三角不等式より，

$$\begin{aligned} d(g(x), O^c) &\geq d(f(x), O^c) - |f(x) - g(x)| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

である．したがって，$g(K) \subset O$ となる．g は任意だから，

$$B\left(f; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset W(K, O)$$

となり，一様収束位相に関して，$W(K, O)$ は $C(X)$ の開集合である．

(2) $f \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ とする．(1) より，一様収束位相に関する $B(f; \varepsilon)$ がコンパクト開位相に関する f の近傍であることを示せばよい．

まず，f は連続だから，集合族

$$\left\{ f^{-1}\left(\left(f(x) - \frac{\varepsilon}{4}, f(x) + \frac{\varepsilon}{4}\right)\right) \,\middle|\, x \in X \right\}$$

は X の開被覆である．X はコンパクトだから，ある x_1, x_2, $\dots$, $x_n \in X$ が存在し，

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}\left(\left(f(x_i) - \frac{\varepsilon}{4}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$$

となる．ここで, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して,

$$K_i = f^{-1}\left(\left[f(x_i) - \frac{\varepsilon}{4}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{4}\right]\right), \quad O_i = \left(f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

とおく．このとき, K_i はコンパクト空間 X の閉集合だから, コンパクトである．また, O_i は $\mathbf{R}$ の開集合である．更に, $f(K_i) \subset O_i$, すなわち, $f \in W(K_i, O_i)$ である．

$g \in W(K_i, O_i)$, $x \in K_i$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{3}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

となる．更に,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

だから, $h \in \bigcap_{i=1}^{n} W(K_i, O_i)$ とすると,

$$\begin{aligned} d(f, h) &< \frac{3}{4}\varepsilon \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる．よって,

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} W(K_i, O_i) \subset B(f; \varepsilon)$$

となり, コンパクト開位相に関して, $B(f; \varepsilon)$ は f の近傍である．

3. $x \in A$ とする．A は局所コンパクトだから, A における x のコンパクトな近傍 U が存在する．また, X は Hausdorff だから, U は X の閉集合である．更に, U は A における x の近傍だから, X のある開集合 V が存在し,

$$x \in V \cap A \subset U$$

となる．ここで, U は X の閉集合だから,

$$\begin{aligned} x &\in V \cap \overline{A} \\ &\subset \overline{V \cap A} \\ &\subset U \end{aligned}$$

となり, U は $\overline{A}$ における x の近傍となる．x は任意だから, A は $\overline{A}$ の開集合である．したがって, X のある開集合 O が存在し,

$$A = O \cap \overline{A}$$

となる．すなわち, $B = \overline{A}$ とおくと, B は X の閉集合であり,

$$A = O \cap B$$

である．