§1. Euclid 空間

Euclid 空間は微分積分や線形代数においても現れる親しみのある集合であるが, これから扱っていくベクトル解析においても例外ではない. ここでは, Euclid 空間に関する事実を簡単にまとめておこう.

まず, 実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と表し, 自然数 n を固定しておく. このとき, n 個の実数を横に並べたものを考え,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

とおく. $\mathbf{R}^1$ は $\mathbf{R}$ のことである. また, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ をそれぞれ直線, 平面, 空間と同一視し, $\mathbf{R}^n$ の元を点ともいう.

$\mathbf{R}^n$ の 2 つの元 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ および $c \in \mathbf{R}$ に対して, 和 $x + y \in \mathbf{R}^n$ およびスカラー倍 $cx \in \mathbf{R}^n$ をそれぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

により定めると, $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間となる. $\mathbf{R}^n$ の零ベクトル 0 は $(0, 0, \ldots, 0)$ と表される元である.

更に, $\mathbf{R}^n$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

により定められる, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数である. 以下では, $\mathbf{R}^n$ の標準内積を単に内積ということにする. $\mathbf{R}^n$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考えたものが n 次元実 Euclid 空間である. ここでは, 複素 Euclid 空間は考えないので, $\mathbf{R}^n$ を単に n 次元 Euclid 空間といっても構わない. x と y の内積 $\langle x, y\rangle$ は行列の積を用いて $x\,{}^t y$ と表しておくと, 計算が容易になることがある. ただし, ${}^t y$ は y の転置行列である. 以下では, n 次元 Euclid 空間としての $\mathbf{R}^n$ を考える. $\mathbf{R}^n$ の内積に関して, 次がなりたつ.

定理 1.1　$x, y, z \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
(2) $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$.
(3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
(4) $x \neq 0$ ならば, $\langle x, x\rangle > 0$.

$\mathbf{R}^n$ のノルム $\|\ \|$ は内積を用いて

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定められる, $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数である. 定義より, x の長さ $\|x\|$ は $\|x\| \geq 0$ をみたし, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみである. $\mathbf{R}^n$ のノルムに関して, 次がなりたつ.

定理 1.2　$x, y \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\|cx\| = |c|\|x\|$.
(2) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. (Cauchy-Schwarz の不等式)
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (三角不等式)

証明　(2) のみ示す.

$y = 0$ のときは明らかである.

$y \neq 0$ のとき, $\langle y, y\rangle > 0$ であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle \langle y, y\rangle \\
&= \left(\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle \right) \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2
\end{aligned}
$$

となる．よって，

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

である．したがって，(2) がなりたつ． □

$\mathbf{R}^2$ の 2 点 $a = (a_1, a_2)$ および $b = (b_1, b_2)$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう平面ベクトルとみなすことにする．a, b がともに零ベクトルではないとし，これらのなす角が θ であり，$0 < \theta < \pi$ とする．このとき，a, b を 2 辺とする三角形に対して余弦定理を用いると，

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$

だから，

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$

である．よって，

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \|a\|\|b\| \cos\theta,$$

すなわち，

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$$

がなりたつ．特に，a と b が直交するのは $\langle a, b\rangle = 0$ のときである．

更に，a, b を 2 辺とする平行四辺形の面積は

$$
\begin{aligned}
\|a\|\|b\| \sin\theta &= \|a\|\|b\|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
&= \|a\|\|b\|\sqrt{1 - \frac{\langle a, b\rangle^2}{\|a\|^2\|b\|^2}} \\
&= \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\
&= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}
$$

となり，2 次の行列式を幾何学的に解釈することができる．

また，$\mathbf{R}^3$ の 2 点 $a = (a_1, a_2, a_3)$ および $b = (b_1, b_2, b_3)$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう空間ベクトルとみなすことにする．平面ベクトルの場合と同様に，a, b のなす角を θ とすると，

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$$

がなりたつ．

更に，a と b の外積 $a \times b \in \mathbf{R}^3$ は a, b が平行な場合は零ベクトルであり，a, b が平行ではない場合は次の (1)〜(3) をみたすように定められる．

(1) $a \times b$ は $a,\, b$ と直交する.

(2) $\|a \times b\|$ は $a,\, b$ を 2 辺とする平行四辺形の面積である.

(3) $a \times b$ の向きは a が b に重なるように角 θ 回転するとき, 右ネジが進む向きである.
ただし, $0 < \theta < \pi$ とする.

$e_1,\, e_2,\, e_3 \in \mathbf{R}^3$ を

$$e_1 = (1,\, 0,\, 0), \quad e_2 = (0,\, 1,\, 0), \quad e_3 = (0,\, 0,\, 1)$$

により定める. よく用いられる右手系という座標系を選んでおくと,

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2 \tag{$*$}$$

がなりたつ. 更に, $\mathbf{R}^3$ の外積に関して, 次がなりたつ.

定理 1.3 $a,\, b,\, c \in \mathbf{R}^3$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.

(1) $a \times b = -b \times a$.

(2) $k \in \mathbf{R}$ とすると, $(ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b)$.

(3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

$\mathbf{R}^3$ の 2 点 $a = (a_1,\, a_2,\, a_3)$ および $b = (b_1,\, b_2,\, b_3)$ は

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

と表されるから, 定理 1.3 と $(*)$ より,

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2,\, a_3b_1 - a_1b_3,\, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

となる.

また, $a,\, b,\, c \in \mathbf{R}^3$ に対して, $a,\, b,\, c$ の 3 重積は $\langle a \times b, c\rangle$ により定められる. $a,\, b,\, c$ を

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, \quad c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

と表しておくと, 上の計算より

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c\rangle &= c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - c_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{(第 3 行に関する余因子展開)} \\ &= \det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. 平面ベクトルの場合と同様の計算を行うと, $a,\, b,\, c$ を 3 辺とする平行六面体の体積は $|\langle a \times b, c\rangle|$ であることが分かり, 3 次の行列式を幾何学的に解釈することができる.

問題 1

1. A を n 次の実正方行列とすると, 任意の $x,\ y \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$\langle x, yA \rangle = \langle x\,{}^tA, y \rangle$$

がなりたつことを示せ.

2. $x,\ y \in \mathbf{R}^n$ とすると, 中線定理

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

がなりたつことを示せ.

3. 外積 $(1,\ 2,\ 3) \times (4,\ 5,\ 6)$ を求めよ.

4. $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R}^3$ とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつことを示せ.
(1) $\langle a \times b, c \rangle = \langle b \times c, a \rangle = \langle c \times a, b \rangle$.
(2) $(a \times b) \times c = \langle a, c \rangle b - \langle b, c \rangle a$.
(3) $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$. (Jacobi の恒等式)
(4) $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$. (Lagrange の公式)

5. $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}^3$ を次の (1), (2) のように定めると, $a,\ b,\ c$ は同一直線上にはない. $a,\ b,\ c$ を通る平面の方程式を求めよ.
(1) $a = (1,\ 2,\ 3)$, $b = (2,\ 3,\ 1)$, $c = (3,\ 1,\ 2)$.
(2) $a = (1,\ 1,\ 1)$, $b = (2,\ 2,\ 2)$, $c = (3,\ 4,\ 5)$.

問題 1 の解答

1. 内積を行列の積を用いて表すと,

$$\begin{aligned}\langle x, yA\rangle &= x^t(yA)\\ &= x({}^tA^ty)\\ &= (x^tA)^ty\\ &= \langle x^tA, y\rangle\end{aligned}$$

である. よって, あたえられた等式がなりたつ.

2. ノルムの定義および内積の性質より,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle\\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 + 2\langle x, -y\rangle + \|-y\|^2\\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

である. よって, 中線定理がなりたつ.

3. 求める外積は

$$\begin{aligned}(1,\,2,\,3)\times(4,\,5,\,6) &= (2\cdot 6 - 3\cdot 5,\, 3\cdot 4 - 1\cdot 6,\, 1\cdot 5 - 2\cdot 4)\\ &= (-3,\, 6,\, -3)\end{aligned}$$

である.

4. (1) 行列式の性質より,

$$\det\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b\\ c\\ a\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c\\ a\\ b\end{pmatrix}$$

である. また,

$$\langle a\times b, c\rangle = \det\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

である. よって, (1) がなりたつ.

(2) a, b, c, $(a\times b)\times c$ をそれぞれ

$$(a_1,\, a_2,\, a_3),\quad (b_1,\, b_2,\, b_3),\quad (c_1,\, c_2,\, c_3),\quad (x,\, y,\, z)$$

とおくと,

$$(x,\, y,\, z) = (a_2b_3 - a_3b_2,\, a_3b_1 - a_1b_3,\, a_1b_2 - a_2b_1)\times(c_1,\, c_2,\, c_3)$$

だから,

$$\begin{aligned}x &= (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2\\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3
\end{aligned}
$$

である. よって, (2) がなりたつ.

(3) (2) より,

$$
\begin{aligned}
(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b &= \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a + \langle b, a\rangle c - \langle c, a\rangle b \\
&\quad + \langle c, b\rangle a - \langle a, b\rangle c \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である. よって, (3) がなりたつ.

(4) (1), (2) より,

$$
\begin{aligned}
\langle a \times b, c \times d\rangle &= \langle b \times (c \times d), a\rangle \\
&= -\langle (c \times d) \times b, a\rangle \\
&= -\langle \langle c, b\rangle d - \langle d, b\rangle c, a\rangle \\
&= -\langle c, b\rangle\langle d, a\rangle + \langle d, b\rangle\langle c, a\rangle \\
&= \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle
\end{aligned}
$$

である. よって, (4) がなりたつ.

5. (1) 法ベクトルを求めると,

$$
\begin{aligned}
(b - a) \times (c - a) &= (1,\ 1,\ -2) \times (2,\ -1,\ -1) \\
&= (1 \cdot (-1) - (-2)(-1),\ (-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-1),\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) \\
&= (-3,\ -3,\ -3)
\end{aligned}
$$

である. よって, 求める平面の方程式は

$$
-3(x - 1) - 3(y - 2) - 3(z - 3) = 0,
$$

すなわち,

$$
x + y + z = 6
$$

である.

(2) 法ベクトルを求めると,

$$
\begin{aligned}
(b - a) \times (c - a) &= (1,\ 1,\ 1) \times (2,\ 3,\ 4) \\
&= (1 \cdot 4 - 1 \cdot 3,\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4,\ 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \\
&= (1,\ -2,\ 1)
\end{aligned}
$$

である. よって, 求める平面の方程式は

$$
(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 1) = 0,
$$

すなわち,

$$
x - 2y + z = 0
$$

である.