§2. ベクトル値関数

微分積分では実数値関数, すなわち, $\mathbf{R}$ に値をとる関数を主に扱った. 簡単のため, 以下では区間を定義域とする 1 変数の関数を考えることにしよう. すると, $\mathbf{R}$ に値をとる関数とは区間から $\mathbf{R}$ への写像のことである. ここでは, n を 2 以上の自然数とし, 区間から $\mathbf{R}^n$ への写像, すなわち, ベクトル値関数を考える. なお, ベクトル値関数と対比させて, $\mathbf{R}$ に値をとる関数をスカラー値関数ともいう.

まず, I を区間とし, f を I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, f は I で定義された n 個の関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ を用いて

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)) \quad (t \in I) \tag{$*$}$$

と表すことができる.

次に, g も I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とし,

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間であるから, I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 $f+g$ を

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = (f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), \ldots, f_n(t) + g_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる. また, c を I で定義されたスカラー値関数とすると, $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 cf を

$$(cf)(t) = c(t)f(t) = (c(t)f_1(t), c(t)f_2(t), \ldots, c(t)f_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

更に, $\mathbf{R}^n$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考える. このとき, I で定義されたスカラー値関数 $\langle f, g\rangle$ を

$$\langle f, g\rangle(t) = \langle f(t), g(t)\rangle = f(t)^t g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる. また, $\mathbf{R}^n$ の標準内積から定まるノルム $\|\ \|$ を用いて, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ を

$$\|f\|(t) = \|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle} \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

$\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数に対しては外積を考えることもできる. f, g を区間 I で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, I で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 $f \times g$ を

$$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

再び, f を区間 I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数としよう. f が $(*)$ のように表されているとき, 各 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ が I で微分可能ならば, f は I で微分可能であるという. このとき, I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 f' を

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_n'(t)) \quad (t \in I)$$

により定め, f' を f の微分という．すなわち, ベクトル値関数の微分は成分毎に考えればよい．ベクトル値関数の微分に関して, 次がなりたつ．

定理 2.1 f, g を区間 I で微分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ．
(1) $(f+g)' = f' + g'$.
(2) c を I で微分可能なスカラー値関数とすると, $(cf)' = c'f + cf'$.
(3) $\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$.
(4) $n=3$ のとき, $(f\times g)' = f'\times g + f\times g'$.

証明 (1): 成分毎に考え, 微分の線形性を用いればよい．
(2): 成分毎に考え, 積の微分法を用いればよい．
(3): f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t),\, f_2(t),\, \ldots,\, f_n(t)),\quad g(t) = (g_1(t),\, g_2(t),\, \ldots,\, g_n(t))\quad (t\in I)$$

と表しておくと,

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle'(t) &= \langle f(t), g(t)\rangle' \\
&= (f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + \cdots + f_n(t)g_n(t))' \\
&= (f_1(t)g_1(t))' + (f_2(t)g_2(t))' + \cdots + (f_n(t)g_n(t))' \\
&= (f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t)) + (f_2'(t)g_2(t) + f_2(t)g_2'(t)) + \cdots + (f_n'(t)g_n(t) + f_n(t)g_n'(t)) \\
&= f_1'(t)g_1(t) + f_2'(t)g_2(t) + \cdots + f_n'(t)g_n(t) + f_1(t)g_1'(t) + f_2(t)g_2'(t) + \cdots + f_n(t)g_n'(t) \\
&= \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle \\
&= \langle f', g\rangle(t) + \langle f, g'\rangle(t) \\
&= (\langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle)(t)
\end{aligned}$$

である．よって, (3) がなりたつ．
(4): f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t),\, f_2(t),\, f_3(t)),\quad g(t) = (g_1(t),\, g_2(t),\, g_3(t))\quad (t\in I)$$

と表しておき,

$$(f\times g)(t) = (h_1(t),\, h_2(t),\, h_3(t))\quad (t\in I)$$

とおく．このとき, 外積の定義より,

$$h_1(t) = f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t),\quad h_2(t) = f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t),\quad h_3(t) = f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)$$

である．よって,

$$\begin{aligned}
h_1'(t) &= (f_2'(t)g_3(t) + f_2(t)g_3'(t)) - (f_3'(t)g_2(t) + f_3(t)g_2'(t)) \\
&= (f_2'(t)g_3(t) - f_3'(t)g_2(t)) + (f_2(t)g_3'(t) - f_3(t)g_2'(t))
\end{aligned}$$

である．同様に,

$$\begin{aligned}
h_2'(t) &= (f_3'(t)g_1(t) - f_1'(t)g_3(t)) + (f_3(t)g_1'(t) - f_1(t)g_3'(t)), \\
h_3'(t) &= (f_1'(t)g_2(t) - f_2'(t)g_1(t)) + (f_1(t)g_2'(t) - f_2(t)g_1'(t))
\end{aligned}$$

だから,

$$
\begin{aligned}
(f \times g)'(t) &= (f_2'(t)g_3(t) - f_3'(t)g_2(t),\ f_3'(t)g_1(t) - f_1'(t)g_3(t),\ f_1'(t)g_2(t) - f_2'(t)g_1(t)) \\
&\quad + (f_2(t)g_3'(t) - f_3(t)g_2'(t),\ f_3(t)g_1'(t) - f_1(t)g_3'(t),\ f_1(t)g_2'(t) - f_2(t)g_1'(t)) \\
&= (f' \times g)(t) + (f \times g')(t)
\end{aligned}
$$

である. したがって, (4) がなりたつ. □

ベクトル値関数の積分についても考えよう. f を閉区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とし,

$$
f(t) = (f_1(t),\ f_2(t),\ \dots,\ f_n(t)) \quad (t \in [a,b])
$$

と表しておく. 各 $f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n$ が $[a,b]$ で積分可能なとき, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \in \mathbf{R}^n$ を

$$
\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt,\ \int_a^b f_2(t)\,dt,\ \dots,\ \int_a^b f_n(t)\,dt \right)
$$

により定め, これを f の $[a,b]$ における定積分という. このとき, f は $[a,b]$ で積分可能であるという. スカラー値関数の定積分の場合と同様に, ベクトル値関数の定積分は線形性をもつ. すなわち, 次がなりたつ.

定理 2.2 $f,\ g$ を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$

(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt.$

証明 $f,\ g$ をそれぞれ

$$
f(t) = (f_1(t),\ f_2(t),\ \dots,\ f_n(t)), \quad g(t) = (g_1(t),\ g_2(t),\ \dots,\ g_n(t))\ (t \in I)
$$

と表し, 成分毎に計算すればよい. □

f を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 F を

$$
F(t) = \int_a^t f(s)\,ds \quad (t \in [a,b])
$$

により定める. これを f の不定積分という. 微分積分学の基本定理より,

$$
F'(t) = f(t) \quad (t \in [a,b])
$$

がなりたち, 更に,

$$
\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)
$$

がなりたつ.

問題 2

1. $\mathbf{R}$ で定義された $\mathbf{R}^2$ に値をとるベクトル値関数 f, g をそれぞれ

$$f(t) = (t, t^2), \quad g(t) = (t^3, t^4) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.
(1) $\langle f, g' \rangle$ を求めよ.
(2) $\displaystyle\int_0^1 \|f\|(t)\,dt$ を求めよ.
(3) $\displaystyle\int_0^1 (f+g)(t)\,dt$ を求めよ.

2. $\mathbf{R}$ で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 f を

$$f(t) = (t,\, t^2,\, t^3) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.
(1) $f \times f'$ を求めよ.
(2) $\langle f \times f', f'' \rangle$ を求めよ.

3. f を開区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. ある $t_0 \in I$ が存在し, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ が $t = t_0$ で最大または最小となるならば, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交することを示せ.

4. f を区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. $\|f\|$ が定数関数となるための必要十分条件は, 任意の $t \in I$ に対して, $f(t)$ と $f'(t)$ が直交することであることを示せ.

5. f を区間 I で定義された 2 回微分可能な $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数とする. I で定義されたスカラー値関数 c が存在し, 任意の $t \in I$ に対して,

$$f''(t) = c(t)f(t)$$

がなりたつならば, $f \times f'$ は定ベクトル, すなわち, t に依存しないベクトルであることを示せ.

問題 2 の解答

1. (1) まず,

$$g'(t) = (3t^2, 4t^3)$$

である．よって,

$$\begin{aligned}\langle f, g'\rangle(t) &= \langle f(t), g'(t)\rangle \\ &= \langle (t, t^2), (3t^2, 4t^3)\rangle \\ &= t \cdot 3t^2 + t^2 \cdot 4t^3 \\ &= 3t^3 + 4t^5\end{aligned}$$

である．

(2) $t \in [0, 1]$ のとき,

$$\begin{aligned}\|f\|(t) &= \sqrt{t^2 + (t^2)^2} \\ &= t\sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$

である．よって,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|f\|(t)dt &= \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\end{aligned}$$

である．

(3) 直接計算すると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f+g)(t)\,dt &= \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)\,dt \\ &= \left(\int_0^1 t\,dt, \int_0^1 t^2\,dt\right) + \left(\int_0^1 t^3\,dt, \int_0^1 t^4\,dt\right) \\ &= \left(\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1, \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\right) + \left(\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1, \left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}, \frac{8}{15}\right)\end{aligned}$$

である．

2. (1) まず,

$$f'(t) = (1,\, 2t,\, 3t^2)$$

である．よって,

$$\begin{aligned}(f \times f')(t) &= (t,\, t^2,\, t^3) \times (1,\, 2t,\, 3t^2) \\ &= (t^2 \cdot 3t^2 - t^3 \cdot 2t,\, t^3 \cdot 1 - t \cdot 3t^2,\, t \cdot 2t - t^2 \cdot 1) \\ &= (t^4,\, -2t^3,\, t^2)\end{aligned}$$

である.

(2) (1) の計算より,

$$
\begin{aligned}
f''(t) &= (1',\,(2t)',\,(3t^2)') \\
&= (0,\,2,\,6t)
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$
\begin{aligned}
\langle f \times f', f'' \rangle(t) &= \langle (t^4,\,-2t^3,\,t^2), (0,\,2,\,6t) \rangle \\
&= t^4 \cdot 0 + (-2t^3) \cdot 2 + t^2 \cdot 6t \\
&= 2t^3
\end{aligned}
$$

である.

3. まず,

$$
\begin{aligned}
\left(\|f\|^2\right)' &= \langle f, f \rangle' \\
&= \langle f', f \rangle + \langle f, f' \rangle \\
&= 2\langle f, f' \rangle
\end{aligned}
$$

である. 仮定より, $\|f\|^2$ は $t = t_0$ で最大または最小となるから,

$$
\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \|f\|^2 \\
&= 2\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$
\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle = 0,
$$

すなわち, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交する.

4. まず, $\|f\|$ が定数関数であると仮定する. このとき, $\|f\|^2$ も定数関数だから,

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\|f\|^2\right)' \\
&= 2\langle f, f' \rangle
\end{aligned}
$$

である. よって, 任意の $t \in I$ に対して

$$
\langle f(t), f'(t) \rangle = 0,
$$

すなわち, $f(t)$ と $f'(t)$ は直交する.

上の計算は逆に辿ることもできるから, 任意の $t \in I$ に対して, $f(t)$ と $f'(t)$ が直交すると仮定すると, $\|f\|$ は定数関数である.

5. 仮定より,

$$
\begin{aligned}
(f \times f')' &= f' \times f' + f \times f'' \\
&= 0 + f \times (cf) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である. よって, $f \times f'$ の各成分は定数となるから, $f \times f'$ は定ベクトルである.