§5. ベクトル場

ここでは, ベクトル場というベクトル値関数について述べる.

定義 5.1 D を $\mathbf{R}^n$ の空でない部分集合とする. D で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数を D 上の n 次元ベクトル場という.

ベクトル場があたえられているとは, 各点に対してその点を始点とするベクトルがあたえられていることと理解することができる. また, ベクトル場に対して, $\mathbf{R}^n$ の部分集合で定義されたスカラー値関数をスカラー場ともいう.

まず, 力学に現れるベクトル場の例を挙げよう.

例 5.1 (運動方程式) 点 $x \in \mathbf{R}^3$ における単位質量の受ける力が $F(x)$ と表されるとする. このとき, 時刻 t における質量 m の質点の位置を $\gamma(t)$ とおくと, 運動方程式

$$m\gamma''(t) = F(\gamma(t))$$

がなりたつ. 上の F は $\mathbf{R}^3$ あるいはその部分集合で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとる関数であるから, F は 3 次元ベクトル場である.

スカラー場から勾配というベクトル場を定めることができる.

例 5.2 (勾配) D を $\mathbf{R}^n$ の空でない開集合, f を D 上の C^1 級のスカラー場とする. このとき, D 上の連続な n 次元ベクトル場 $\mathrm{grad}\, f$ を

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

により定めることができる. $\mathrm{grad}\, f$ を f の勾配という.

例 5.2 とは逆に, ベクトル場から発散というスカラー場を定めることができる.

例 5.3 (発散) D を $\mathbf{R}^n$ の空でない開集合, F を D 上の C^1 級の n 次元ベクトル場とし, F を

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

と表しておく. このとき, D 上の連続なスカラー場 $\mathrm{div}\, F$ を

$$\mathrm{div}\, F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

により定めることができる. $\mathrm{div}\, F$ を F の発散という.

例 5.4 (Laplacian) D を $\mathbf{R}^n$ の空でない開集合, f を D 上の C^2 級のスカラー場とすると,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

とおくと,

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f) = \Delta f$$

と表すことができる．Δ を Laplace 作用素または Laplacian という．

偏微分方程式

$$\Delta f = 0$$

を Laplace 方程式という．また, Laplace 方程式をみたす f は調和であるという．例えば, 関数論に現れる正則関数の実部および虚部は Cauchy-Riemann の関係式をみたすことから, 調和であることが分かる．

なお, Laplacian はベクトル場に対しても作用させることができる．実際, ベクトル場の各成分に対して Laplacian を作用させればよい．すなわち,

$$F = (F_1,\, F_2,\, \ldots,\, F_n)$$

と表される D 上の C^2 級の n 次元ベクトル場 F に対して,

$$\Delta F = (\Delta F_1,\, \Delta F_2,\, \ldots,\, \Delta F_n)$$

とおけばよい．

2 次元および 3 次元のベクトル場に対しては, それぞれ回転というスカラー場およびベクトル場を定めることができる．

例 5.5 (回転)　まず, D を $\mathbf{R}^2$ の空でない開集合, F を D 上の C^1 級の 2 次元ベクトル場とし, F を

$$F = (F_1,\, F_2)$$

と表しておく．このとき, D 上の連続なスカラー場 $\mathrm{rot}\,F$ を

$$\mathrm{rot}\,F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

により定める．$\mathrm{rot}\,F$ を F の回転という．なお, $\mathrm{rot}\,F$ を $\mathrm{curl}\,F$ と表すこともある．

また, D を $\mathbf{R}^3$ の空でない開集合, F を D 上の C^1 級の 3 次元ベクトル場とし, F を

$$F = (F_1,\, F_2,\, F_3)$$

と表しておく．このとき, D 上の連続な 3 次元ベクトル場 $\mathrm{rot}\,F$ を

$$\mathrm{rot}\,F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3},\, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1},\, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$

により定める．

電磁気学に現れる発散と回転の例を挙げよう．

例 5.6 (Maxwell の方程式)　電磁気学の基本方程式である Maxwell の方程式とは 4 つの方程式

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \mathrm{rot}\,E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}, \\ \mathrm{div}\,B = 0, \\ c^2\,\mathrm{rot}\,B = \dfrac{j}{\varepsilon_0} + \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

である. ただし, E は電場, B は磁場, ρ は電荷密度, j は電流, c は光速, ε_0 は誘電率, t は時刻を表す.

勾配, 発散, 回転に関する公式は数多くあるが, 幾つかを挙げておこう.

定理 5.1 $n = 2, 3$ とし, D を $\mathbf{R}^n$ の空でない開集合, f を D 上の C^2 級のスカラー場, F を D 上の C^2 級の n 次元ベクトル場とする. このとき, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) = 0$.
(2) $n = 3$ のとき, $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,F) = 0$.
(3) $n = 3$ のとき, $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,F) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,F) - \Delta F$.

証明 (1): $n = 3$ の場合のみ示す.
偏微分の順序が交換可能であることを用いると,

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) &= \mathrm{rot}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

である.
(2): F を

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

と表しておき, 偏微分の順序が交換可能であることを用いると,

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,F) &= \mathrm{div}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

である.
(3): F を

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

と表しておく. このとき, (3) の等式の両辺の第 1 成分は等しく,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right)\\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2}\right)\\ &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_3}\end{aligned}$$

である. その他の成分についても同様である. よって, (3) がなりたつ. □

問題 5

1. $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$ とし, $\mathbf{R}^2$ 上のスカラー場 f を

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy - ay^2 + cx + dy + e \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. f は調和であることを示せ.

2. $\mathbf{R}^2$ の領域上の C^2 級のスカラー場 $z = f(x,y)$ と極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の合成を考える.

(1) 等式

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

がなりたつことを示せ.

(2) $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上のスカラー場

$$z = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

は調和であることを示せ.

3. 真空における Maxwell の方程式は

$$\begin{cases} \operatorname{div} E = 0, \\ \operatorname{rot} E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{div} B = 0, \\ c^2 \operatorname{rot} B = \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

と表すことができる. E, B が C^2 級ならば, E, B の各成分は偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f$$

をみたすことを示せ. なお, 上の偏微分方程式を波動方程式という.

4. D を $\mathbf{R}^3$ の空でない開集合, F, f をそれぞれ D 上の C^1 級のベクトル場, スカラー場とすると,

$$\operatorname{rot}(fF) = \operatorname{grad} f \times F + f \operatorname{rot} F$$

がなりたつことが分かる.

f が D の任意の点で 0 とはならず,

$$\operatorname{rot}(fF) = 0$$

をみたすならば,

$$\langle F, \operatorname{rot} F \rangle = 0$$

がなりたつことを示せ.

5. D を $\mathbf{R}$ の空でない開集合, f を D 上の C^2 級のスカラー場とする. このとき,

$$\operatorname{rot}(f \operatorname{grad} f) = 0$$

がなりたつことを示せ.

問題 5 の解答

1. まず,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + 2by + c, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a$$

である．また,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2bx - 2ay + d, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a$$

である．よって,

$$\Delta f = 0$$

となり, f は調和である．

2. (1) まず,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

である．よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta\end{aligned}$$

である．また,

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$$

である．よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= -\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}r\cos\theta\right)r\sin\theta - \frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta \\ &\quad + \left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\cos\theta\right)r\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta \\ &\quad - \frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta\end{aligned}$$

である．したがって, あたえられた等式がなりたつ．

(2) 極座標変換を用いると,

$$z = \frac{\cos\theta}{r}$$

である．よって,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{\cos\theta}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\cos\theta}{r^3}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = -\frac{\cos\theta}{r}$$

である．したがって,

$$\begin{aligned}\Delta z &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

となり, z は調和である.

3. 真空における Maxwell の方程式を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(c^2 \operatorname{rot} B\right) \\ &= c^2 \operatorname{rot} \frac{\partial B}{\partial t} \\ &= -c^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) \\ &= -c^2 \left\{\operatorname{grad}(\operatorname{div} E) - \Delta E\right\} \\ &= c^2 \Delta E\end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}(-\operatorname{rot} E) \\ &= -\operatorname{rot} \frac{\partial E}{\partial t} \\ &= -c^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} B) \\ &= -c^2 \left\{\operatorname{grad}(\operatorname{div} B) - \Delta B\right\} \\ &= c^2 \Delta B\end{aligned}$$

である. よって, E, B の各成分は波動方程式をみたす.

4. まず,

$$\begin{aligned}0 &= \operatorname{rot}(fF) \\ &= \operatorname{grad} f \times F + f \operatorname{rot} F\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}f\langle F, \operatorname{rot} F\rangle &= \langle F, f \operatorname{rot} F\rangle \\ &= \langle F, -\operatorname{grad} f \times F\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

である. f は D の任意の点で 0 とはならないから,

$$\langle F, \operatorname{rot} F\rangle = 0$$

がなりたつ.

5. 直接計算すると,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(f \operatorname{grad} f) &= \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} f + f \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \\ &= 0\end{aligned}$$

である.