

## §11. Stokes の定理

ここでは、面積分に関する Stokes の定理について述べよう.  $D$  を  $\mathbf{R}^2$  の面積確定な領域とし、 $D$  の境界は曲線

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

の像として表されているとする. 線積分を考えるため、 $\gamma$  には §6 において述べたように、 $D$  の内部が進行方向の左手となるように向きを定めておく. また、曲面

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

があたえられているとする. このとき、空間曲線  $p \circ \gamma$  の像は曲面  $p$  の像の境界となるが、 $p \circ \gamma$  の向きは  $\gamma$  の向きに合わせておく. このとき、次がなりたつ.

**定理 11.1 (Stokes の定理)**  $F$  を  $p$  の像の近くで  $C^1$  級の 3次元ベクトル場とすると、

$$\iint_p \operatorname{rot} F \, d\vec{A} = \int_{p \circ \gamma} F \, d\vec{s}$$

がなりたつ.

**証明** まず、 $p$  が  $D$  で定義された 2変数のスカラー値関数

$$f : D \rightarrow \mathbf{R}$$

のグラフとして表され、 $F$  がスカラー場  $\varphi$  を用いて

$$F = (\varphi, 0, 0)$$

と表されているときを考える. このとき、

$$\begin{aligned} \iint_p \operatorname{rot} F \, d\vec{A} &= \iint_D \langle (\operatorname{rot} F)(p(u, v)), p_u \times p_v \rangle \, dudv \\ &= \iint_D \langle (0, \varphi_z(p(u, v)), -\varphi_y(p(u, v))), (-f_u, -f_v, 1) \rangle \, dudv \\ &= - \iint_D (\varphi_z(p(u, v))f_v + \varphi_y(p(u, v))) \, dudv \end{aligned}$$

である. また、 $D$  上の 2次元ベクトル場  $G$  を

$$G(u, v) = (\varphi(p(u, v)), 0) \quad ((u, v) \in D)$$

により定めると、

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} G &= -\frac{\partial}{\partial v} \varphi(p(u, v)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial v} \varphi(u, v, f(u, v)) \\ &= -(\varphi_y(p(u, v)) + \varphi_z(p(u, v))f_v) \end{aligned}$$

である. ここで、必要ならば径数表示を変えることにより、 $\gamma$  および  $p \circ \gamma$  の向きは  $t : a \rightarrow b$  としよ. 更に、

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表しておく、Green の定理より、

$$\begin{aligned}
 \iint_p \operatorname{rot} F \, d\vec{A} &= \iint_D \operatorname{rot} G \, dudv \\
 &= \int_\gamma G \, d\vec{s} \\
 &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b \langle (\varphi(p(\gamma(t))), 0), (u'(t), v'(t)) \rangle dt \\
 &= \int_a^b \varphi(p(\gamma(t))) u'(t) dt
 \end{aligned}$$

である。一方、

$$\begin{aligned}
 \int_{p \circ \gamma} F \, d\vec{s} &= \int_a^b \langle F((p \circ \gamma)(t)), (p \circ \gamma)'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b \langle (\varphi(p(\gamma(t))), 0, 0), (u'(t), v'(t), (f \circ \gamma)'(t)) \rangle dt \\
 &= \int_a^b \varphi(p(\gamma(t))) u'(t) dt
 \end{aligned}$$

である。よって、Stokes の定理がなりたつ。

次に、 $p$  が一般の曲面であり、 $F$  が上のように表されているときを考える。このとき、曲面をグラフに分割しておく、分割された各グラフにおいて Stokes の定理がなりたつ。また、各グラフの境界のうち  $D$  の内部にあるものの像については、向きが逆のものが対で現れるから、それらに沿った線積分の値は 0 となる。したがって、Stokes の定理がなりたつ。

更に、 $p$  と  $F$  が一般のときを考える。 $F$  を

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

と表しておく、

$$\iint_p \operatorname{rot} (F_1, 0, 0) \, d\vec{A} = \int_{p \circ \gamma} (F_1, 0, 0) \, d\vec{s}$$

である。同様に、

$$\iint_p \operatorname{rot} (0, F_2, 0) \, d\vec{A} = \int_{p \circ \gamma} (0, F_2, 0) \, d\vec{s},$$

$$\iint_p \operatorname{rot} (0, 0, F_3) \, d\vec{A} = \int_{p \circ \gamma} (0, 0, F_3) \, d\vec{s}$$

である。これらを合わせると、Stokes の定理がなりたつ。 □

**例 11.1**  $D$  を

$$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$$

により定められる  $\mathbf{R}^2$  の領域、 $f$  を

$$f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \quad ((u, v) \in D)$$

により定められる 2 変数のスカラー値関数とし, 原点中心, 半径 1 の球面の一部

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad ((u, v) \in D)$$

を  $f$  のグラフ

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

として表しておく.

また, 3次元ベクトル場  $F$  を

$$F(x, y, z) = (yz, -zx, 0) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める.

このとき, Stokes の定理がなりたつことを直接確かめてみよう. まず,

$$\text{rot } F = (x, y, -2z)$$

である. また, §10 においても扱ったように,

$$p_u \times p_v = \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1 \right)$$

であり, 極座標変換を用いると,  $D$  は領域

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写される. よって,

$$\begin{aligned} \iint_p \text{rot } F \, d\vec{A} &= \iint_D \left\langle (u, v, -2\sqrt{1-u^2-v^2}), \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1 \right) \right\rangle dudv \\ &= \iint_D \left( \frac{u^2+v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} - 2\sqrt{1-u^2-v^2} \right) dudv \\ &= \iint_E \left( \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} - 2\sqrt{1-r^2} \right) r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} - 2r\sqrt{1-r^2} \right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -r^2\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 0 \, d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. 一方,  $\gamma$  を  $D$  の境界を表す曲線とすると,  $F$  の  $p \circ \gamma$  の像における値は恒等的に零ベクトルであるから,

$$\int_{p \circ \gamma} F \, d\vec{s} = 0$$

である.

## 問題 11

1.  $D$  を

$$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$$

により定められる領域,  $f$  を

$$f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \quad ((u, v) \in D)$$

により定められる 2 変数のスカラー値関数とし, 原点中心, 半径 1 の球面の一部

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad ((u, v) \in D)$$

を  $f$  のグラフ

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

として表しておく. また, 自然数  $n$  に対して 3 次元ベクトル場  $F$  を

$$F(x, y, z) = (y^{n-1}, z^{n-1}, x^{n-1}) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. Stokes の定理を用いて, 面積分  $\iint_p \operatorname{rot} F \overrightarrow{dA}$  の値を求めよ.2.  $D$  を  $\mathbf{R}^2$  の面積確定な領域とし,  $D$  の境界は曲線

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

の像として表されているとする. また, 曲面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

があたえられているとする.

(1)  $a \in \mathbf{R}^3$  とすると,

$$\iint_{p \circ \gamma} a \times (p \circ \gamma) \overrightarrow{ds} = 2 \int_p a \overrightarrow{dA}$$

がなりたつことを示せ.

(2)  $f, g$  を  $p$  の像の近くで  $C^1$  級のスカラー場とすると,

$$\int_{p \circ \gamma} f \operatorname{grad} g \overrightarrow{ds} = \iint_p \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g \overrightarrow{dA}$$

がなりたつことを示せ.

(3) 例 5.6 で述べた Maxwell の方程式の第 2 式

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

から Faraday の電磁誘導の法則

$$\int_{p \circ \gamma} E \overrightarrow{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_p B \overrightarrow{dA}$$

を導け.

## 問題 11 の解答

1.  $\gamma$  を  $D$  の境界を表す曲線とすると,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

であり,

$$(p \circ \gamma)(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

である. よって, Stokes の定理より,

$$\begin{aligned} \iint_p \operatorname{rot} F \, d\vec{A} &= \int_{p \circ \gamma} F \, d\vec{s} \\ &= \int_0^{2\pi} \langle F((p \circ \gamma)(t)), (p \circ \gamma)'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (\sin^{n-1} t, 0, \cos^{n-1} t), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin^n t \, dt \\ &= \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}), \\ -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt & (n \text{ は偶数}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}), \\ -4 \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}), \\ -2 \frac{(n-1)!!}{n!!} \pi & (n \text{ は偶数}). \end{cases} \end{aligned}$$

である.

2. (1) 3次元ベクトル場  $F$  を

$$F(x, y, z) = a \times (x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める.  $a = (a_1, a_2, a_3)$  とおくと,

$$F = (a_2 z - a_3 y, a_3 x - a_1 z, a_1 y - a_2 x)$$

だから,

$$\operatorname{rot} F = 2a$$

である. よって, Stokes の定理より,

$$\iint_{p \circ \gamma} a \times (p \circ \gamma) \, d\vec{s} = 2 \int_p a \, d\vec{A}$$

である.

(2) 問題 5-4 で述べたことと定理 5.1(1) より,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(f \operatorname{grad} g) &= \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g + f \operatorname{rot}(\operatorname{grad} g) \\ &= \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g \end{aligned}$$

である. よって, Stokes の定理より,

$$\int_{p \circ \gamma} f \operatorname{grad} g \vec{ds} = \iint_p \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g \vec{dA}$$

である.

(3) Stokes の定理より,

$$\begin{aligned} \int_{p \circ \gamma} E \vec{ds} &= \iint_p \operatorname{rot} E \vec{dA} \\ &= - \iint_p \frac{\partial B}{\partial t} \vec{dA} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \iint_p B \vec{dA} \end{aligned}$$

である.