§3. 写像

写像は集合と同様に現代数学において必要不可欠な概念である.

定義 3.1 X, Y を空でない集合とし, X の任意の元に対して, Y のある元を対応させる規則 f があたえられているとする. このことを

$$f : X \to Y$$

と表し, f を X から Y への写像または X で定義された Y への写像, X を f の定義域または始域, Y を f の値域または終域という. $Y \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ のときは f をそれぞれ実数値関数, 複素数値関数ともいう. また, 実数値関数, 複素数値関数を単に関数ともいう.

写像 f によって $x \in X$ に対して $y \in Y$ が対応するとき, $y = f(x)$ と表す. このとき, y を f による x の像, x を f による y の原像または逆像という.

注意 3.1 写像によって x に対して y が対応することを $x \mapsto y$ とも表す.

以下では, 簡単のため, 写像に対する定義域, 値域はともに空ではない場合を考える.

例 3.1 問題 1.6 では, $\mathbf{R}$ の部分集合の例として, 区間を定義した. いわゆる 1 変数の微分積分では, 区間で定義された実数値関数を考える. I を区間とすると, I を定義域, $\mathbf{R}$ を値域とする実数値関数 f は $f : I \to \mathbf{R}$ と表すことができる. 例えば, $a \in \mathbf{R}$ を定数とし, $f : I \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = a \quad (x \in I)$$

により定めると, f は任意の $x \in I$ に対して a を対応させる定数関数である. また, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を 0 でない定数, $b \in \mathbf{R}$ を定数とし, $f : I \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = ax + b \quad (x \in I)$$

により定めると, f は 1 次関数である. 更に, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を 0 でない定数, b, $c \in \mathbf{R}$ を定数とし, $f : I \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in I)$$

により定めると, f は 2 次関数である.

例 3.2 (定値写像) X, Y を空でない集合とし, $y_0 \in Y$ を 1 つ選んで固定しておく. このとき, 写像 $f : X \to Y$ を

$$f(x) = y_0 \quad (x \in X)$$

により定める. f を定値写像という. 例 3.1 で述べた定数関数は定値写像の例でもある.

例 3.3 (包含写像, 恒等写像) X, Y を空でない集合とし, $X \subset Y$ とする. このとき, 写像 $\iota : X \to Y$ を

$$\iota(x) = x \quad (x \in X)$$

により定めることができる. ι を包含写像という. 特に, $X = Y$ のときは ι を id_X または 1_X と表し, X 上の恒等写像という.

例 3.4 (制限写像) X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とし, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ とする. このとき, 写像 $f|_A : A \to Y$ を

$$f|_A(x) = f(x) \quad (x \in A)$$

により定めることができる. $f|_A$ を f の A への制限という.

f, g を写像とする. f と g の定義域が等しく, f と g の値域も等しく, 更に, f, g の定義域の任意の元 x に対して, $f(x) = g(x)$ がなりたつとき, $f = g$ と表し, f と g は等しいという. また, f と g が等しくないときは $f \neq g$ と表す.

写像に対してグラフという集合を対応させることができる. まず, グラフを定義するための準備として, 2 つの集合の直積について述べよう. X, Y を集合とする. このとき, $x \in X$, $y \in Y$ の組 (x, y) 全体からなる集合を $X \times Y$ と表し, X と Y の直積という. すなわち,

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X,\ y \in Y\}$$

である. ただし, 上の組は順序も込みで考えたものであり, (x, y), $(x', y') \in X \times Y$ に対して, $(x, y) = (x', y')$ となるのは $x = x'$ かつ $y = y'$ のときであるとする.

例 3.5 集合 X, Y を $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$ により定めると,

$$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}, \quad X \times X = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\},$$

$$Y \times X = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\},$$

$$Y \times Y = \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5)\}$$

である. 例えば, $X \times X$ の元 $(1, 2)$ と $(2, 1)$ は異なるものであることに注意しよう. なお, $X \times X$ や $Y \times Y$ はそれぞれ X^2, Y^2 とも表す.

それでは, 写像のグラフを定義しよう.

定義 3.2 X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とする. このとき, $G(f) \subset X \times Y$ を

$$G(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$$

により定め, これを f のグラフという.

例 3.6 例 3.1 で述べた, 区間 I で定義された実数値関数 $f : I \to \mathbf{R}$ のグラフは

$$G(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in I\}$$

である. $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}$ の直積 $\mathbf{R}^2$ を平面とみなすと, 平面の部分集合であるグラフ $G(f)$ を考えることによって, 関数 f を視覚的に捉えることができる.

写像の定義域や値域の部分集合に対して, それぞれ次のような値域, 定義域の部分集合を考えることができる.

定義 3.3 X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とする.

$A \subset X$ とする. このとき, $f(A) \subset Y$ を

$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$$

により定め, これを f による A の像という. ただし, $f(\emptyset) = \emptyset$ とする.

$B \subset Y$ とする. このとき, $f^{-1}(B) \subset X$ を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}$$

により定め, これを f による B の原像または逆像という. ただし, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ とする.

注意 3.2 定義 3.3 において, $f(X)$ を f の値域ということもある. この場合, Y は終域という方がよい.

例 3.7 集合 X, Y を $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$ により定め, 写像 $f : X \to Y$ を $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$ により定める. このとき,

$$f(\{1\}) = \{4\}, \quad f(\{1, 2\}) = \{4, 5\}, \quad f^{-1}(\{4\}) = \{1\}, \quad f^{-1}(\{4, 5\}) = X$$

である.

像および逆像に関して, 次がなりたつ.

定理 3.1 X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とし, A, A_1, $A_2 \subset X$, B, B_1, $B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次の (1)〜(10) がなりたつ.
(1) $A_1 \subset A_2$ ならば, $f(A_1) \subset f(A_2)$.
(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
(4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.
(5) $B_1 \subset B_2$ ならば, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
(6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
(9) $f^{-1}(f(A)) \supset A$.
(10) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

証明 (1), (2), (5), (6) のみ示す.
(1): $y \in f(A_1)$ とする. このとき, 像の定義より, ある $x \in A_1$ が存在し, $y = f(x)$ である. ここで, $x \in A_1$ および $A_1 \subset A_2$ より, $x \in A_2$ である. よって, 像の定義より, $f(x) \in f(A_2)$, すなわち, $y \in f(A_2)$ である. したがって, $y \in f(A_1)$ ならば $y \in f(A_2)$, すなわち, $f(A_1) \subset f(A_2)$ である.
(2): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2) &= \{y \in Y \mid \text{ある } x \in A_1 \cup A_2 \text{ が存在し}, y = f(x)\} \\ &= \left\{ y \in Y \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } x_1 \in A_1 \text{ が存在し } y = f(x_1), \text{ または}, \\ \text{ある } x_2 \in A_2 \text{ が存在し } y = f(x_2) \end{array} \right\} \\ &= \{y \in Y \mid y \in f(A_1) \text{ または } y \in f(A_2)\} \\ &= f(A_1) \cup f(A_2) \end{aligned}$$

である. よって, (2) がなりたつ.
(5): $x \in f^{-1}(B_1)$ とする. このとき, 逆像の定義より, $f(x) \in B_1$ である. ここで, $B_1 \subset B_2$ より, $f(x) \in B_2$ である. よって, 逆像の定義より, $x \in f^{-1}(B_2)$ である. したがって, $x \in f^{-1}(B_1)$ ならば $x \in f^{-1}(B_2)$, すなわち, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ である.
(6): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= \{x \in X \mid f(x) \in B_1 \cup B_2\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in B_1 \text{ または } f(x) \in B_2\} \\ &= \{x \in X \mid x \in f^{-1}(B_1) \text{ または } x \in f^{-1}(B_2)\} \\ &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

である. よって, (6) がなりたつ. □

問題 3

1. 関数 $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ を

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f_1(x) = x\quad (x \in \mathbf{R}),\quad f_2 : \{0,\ 1\} \to \mathbf{R},\quad f_2(x) = x\quad (x \in \{0,\ 1\}),$$

$$f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f_3(x) = x^2\quad (x \in \mathbf{R}),\quad f_4 : \{0,\ 1\} \to \mathbf{R},\quad f_4(x) = x^2\quad (x \in \{0,\ 1\})$$

により定める.
(1) $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ の中で, f_1 と等しいものが存在するかどうかを調べよ.
(2) $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ の中で, f_2 と等しいものが存在するかどうかを調べよ.

2. 集合 X, Y を $X = \{1,\ 2,\ 3\}, Y = \{4,\ 5,\ 6\}$ により定め, 写像 $f : X \to Y$ を $f(1) = 4,\ f(2) = 5,\ f(3) = 5$ により定める. 次の集合を外延的記法により表せ.
(1) f のグラフ.
(2) $f(\{2,\ 3\}),\ f(X)$.
(3) $f^{-1}(\{5\}),\ f^{-1}(\{6\}),\ f^{-1}(\{4,\ 6\}),\ f^{-1}(Y)$.

3. 集合 X, Y を $X = \{1,\ 2\}, Y = \{3,\ 4\}$ により定め, 写像 $f : X \to Y$ を $f(1) = 3,\ f(2) = 3$ により定める. 次の集合を外延的記法により表せ.
(1) $f(\{1\} \cap \{2\})$ および $f(\{1\}) \cap f(\{2\})$. 特に, 定理 3.1 (3) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.
(2) $f(\{1\} \setminus \{2\})$ および $f(\{1\}) \setminus f(\{2\})$. 特に, 定理 3.1 (4) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.
(3) $f^{-1}(f(\{1\}))$. 特に, 定理 3.1 (9) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.
(4) $f(f^{-1}(\{3,\ 4\}))$. 特に, 定理 3.1 (10) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.

問題 3 の解答

1. (1) まず, $f_1 = f_1$ である.

次に, f_1 の定義域および値域はともに $\mathbf{R}$ であり, f_2, f_3, f_4 の中で, f_1 と定義域および値域がそれぞれ等しいものは f_3 である. ここで,

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

だから, $f_1(\frac{1}{2}) \neq f_3(\frac{1}{2})$ である. よって, $f_1 \neq f_3$ である.

したがって, f_1, f_2, f_3, f_4 の中で, f_1 と等しいものは f_1 のみである.

(2) まず, $f_2 = f_2$ である.

次に, f_2 の定義域および値域はそれぞれ $\{0, 1\}$, $\mathbf{R}$ であり, f_1, f_3, f_4 の中で, f_2 と定義域および値域がそれぞれ等しいものは f_4 である. ここで,

$$f_2(0) = f_4(0) = 0, \quad f_2(1) = f_4(1) = 1$$

だから, $f_2 = f_4$ である.

よって, f_1, f_2, f_3, f_4 の中で, f_2 と等しいものは f_2 と f_4 である.

2. (1) f およびグラフの定義より, 求めるグラフは

$$\begin{aligned} G(f) &= \{(1, f(1)),\ (2, f(2)),\ (3, f(3))\} \\ &= \{(1, 4),\ (2, 5),\ (3, 5)\} \end{aligned}$$

である.

(2) 像の定義より,

$$\begin{aligned} f(\{2,\ 3\}) &= \{f(2),\ f(3)\} \\ &= \{5,\ 5\} \\ &= \{5\}, \\ f(X) &= f(\{1,\ 2,\ 3\}) \\ &= \{f(1),\ f(2),\ f(3)\} \\ &= \{4,\ 5,\ 5\} \\ &= \{4,\ 5\} \end{aligned}$$

である.

(3) $f(x) \in \{5\}$ となる $x \in X$ を求めると, $x = 2,\ 3$ である. よって, 逆像の定義より,

$$f^{-1}(\{5\}) = \{2,\ 3\}$$

である.

$f(x) \in \{6\}$ となる $x \in X$ は存在しない. よって, 逆像の定義より,

$$f^{-1}(\{6\}) = \{\ \}$$

である.

$f(x) \in \{4,\, 6\}$ となる $x \in X$ を求めると, $x = 1$ である. よって, 逆像の定義より,

$$f^{-1}(\{4,\, 6\}) = \{1\}$$

である.

f は X から Y への写像だから, 任意の $x \in X$ に対して, $f(x) \in Y$ である. よって, 逆像の定義より,

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= X \\ &= \{1,\, 2,\, 3\} \end{aligned}$$

である.

3. (1) 共通部分および像の定義より,

$$\begin{aligned} f(\{1\} \cap \{2\}) &= f(\{\ \}) \\ &= \{\ \} \end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned} f(\{1\}) \cap f(\{2\}) &= \{3\} \cap \{3\} \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

である.

(2) 差および像の定義より,

$$\begin{aligned} f(\{1\} \setminus \{2\}) &= f(\{1\}) \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned} f(\{1\}) \setminus f(\{2\}) &= \{3\} \setminus \{3\} \\ &= \{\ \} \end{aligned}$$

である.

(3) 像および逆像の定義より,

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\{1\})) &= f^{-1}(\{3\}) \\ &= \{1,\, 2\} \end{aligned}$$

である.

(4) 像および逆像の定義より,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\{3,\, 4\})) &= f(\{1,\, 2\}) \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

である.