§6. Euclid 空間の等長変換

初等幾何学では平面上の三角形の合同条件等が扱われるが, 一般に, Euclid 空間内の図形が合同であるとは, 等長変換というもので写り合うこととして定められる. そして, 等長変換で写しても変わらない Euclid 空間内の図形の性質を調べる幾何学は Euclid 幾何学とよばれる.

まず,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

とすると, x と y を結んで得られる線分の長さは, 三平方の定理より,

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|$$

である. そこで, 次のように定める.

定義 6.1　$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x,\, y \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. このとき, d を $\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離, $d(x, y)$ を x と y の Euclid 距離という.

Euclid 距離を用いて, Euclid 空間の等長変換を次のように定める.

定義 6.2　$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への写像とする. f が全単射であり, Euclid 距離を保つ, すなわち, 任意の $x,\, y \in \mathbf{R}^n$ に対して, 等式

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \tag{1}$$

がなりたつとき, f を $\mathbf{R}^n$ の等長変換または合同変換という.

$\mathbf{R}^n$ の等長変換全体の集合を $\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ と表す. 等長変換の定義より, 次がなりたつことが分かる.

定理 6.1　$f,\, g \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $g \circ f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$.
(2) $f^{-1} \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$.

次に述べるように, $\mathbf{R}^n$ の等長変換は直交行列と列ベクトルを用いて表すことができる.

定理 6.2　$f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ は $A \in \mathrm{O}(n)$ および $b \in \mathbf{R}^n$ を用いて,

$$f(x) = Ax + b \quad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{$*$}$$

と表される.

証明　次の (1)〜(4) の順に分けて示す.

(1) まず, $(*)$ のように表される $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の等長変換である.
(2) 逆に, $f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ とする. $e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトル, すなわち,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $a_i \in \mathbf{R}^n$ を

$$a_i = f(e_i) - f(0)$$

により定める. このとき, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底である.

(3) (2) および定理 5.4 より, $A \in \mathrm{O}(n)$ を $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ により定めることができる. 更に, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への写像 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を

$$g(x) = Ax + f(0) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めると, (1) より, $g \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ である. このとき, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$\|(g^{-1} \circ f)(x)\| = \|x\|$$

である.

(4) $f = g$ である. 特に, $b = f(0)$ とおくと, f は $(*)$ のように表される.

(1): f が全単射であり, Euclid 距離を保つことを示せばよい. f が Euclid 距離を保つことのみ示す.

$x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると, 定理 5.4 より,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| \\ &= \|(Ax + b) - (Ay + b)\| \\ &= \|A(x - y)\| \\ &= \|x - y\| \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

である. よって, f は Euclid 距離を保つ.

(2): $i, j = 1, 2, \ldots, n$ とし, 問題 5.3 (1) において, x, y をそれぞれ $a_i, -a_j$ に置き換えると, 等長変換の定義より,

$$\begin{aligned} -2\langle a_i, a_j \rangle &= \|a_i - a_j\|^2 - \|a_i\|^2 - \|a_j\|^2 \\ &= \|(f(e_i) - f(0)) - (f(e_j) - f(0))\|^2 - \|f(e_i) - f(0)\|^2 - \|f(e_j) - f(0)\|^2 \\ &= \|f(e_i) - f(e_j)\|^2 - \|f(e_i) - f(0)\|^2 - \|f(e_j) - f(0)\|^2 \\ &= d(f(e_i), f(e_j))^2 - d(f(e_i), f(0))^2 - d(f(e_j), f(0))^2 \\ &= d(e_i, e_j)^2 - d(e_i, 0)^2 - d(e_j, 0)^2 \\ &= \|e_i - e_j\|^2 - \|e_i - 0\|^2 - \|e_j - 0\|^2 \\ &= \|e_i - e_j\|^2 - 1 - 1 \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\|e_i - e_j\|^2 = \begin{cases} 0 & (i = j), \\ 2 & (i \neq j) \end{cases}$$

だから, $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$ となる. ただし, δ_{ij} は Kronecker の δ である. よって, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底である.

(3): 定理 6.1 より, $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ である. 更に, $f(0) = g(0)$ だから,

$$
\begin{aligned}
\|x\| &= \|x - 0\| \\
&= d(x, 0) \\
&= d((g^{-1} \circ f)(x), (g^{-1} \circ f)(0)) \\
&= d((g^{-1} \circ f)(x), 0) \\
&= \|(g^{-1} \circ f)(x)\|,
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$\|(g^{-1} \circ f)(x)\| = \|x\|$$

である.
(4): (3) において,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (g^{-1} \circ f)(x)$$

とおく. このとき,

$$\|x\| = \|y\| \tag{a}$$

である. また, $i = 1, 2, \ldots, n$ のとき,

$$
\begin{aligned}
d(x, e_i)^2 &= \|x - e_i\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\langle x, e_i \rangle + \|e_i\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2x_i + 1,
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$d(x, e_i)^2 = \|x\|^2 - 2x_i + 1 \tag{b}$$

である. 同様に,

$$d(y, e_i)^2 = \|y\|^2 - 2y_i + 1 \tag{c}$$

である. ここで, $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ であり,

$$
\begin{aligned}
g(e_i) &= Ae_i + f(0) \\
&= a_i + f(e_i) - a_i \\
&= f(e_i),
\end{aligned}
$$

すなわち, $f(e_i) = g(e_i)$ だから,

$$
\begin{aligned}
d(x, e_i) &= d((g^{-1} \circ f)(x), (g^{-1} \circ f)(e_i)) \\
&= d(y, e_i),
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$d(x, e_i) = d(y, e_i) \tag{d}$$

である. よって, (a)〜(d) より, 任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $x_i = y_i$ である. したがって, $x = y$, すなわち, $g^{-1} \circ f = 1_{\mathbf{R}^n}$ となるから, $f = g$ である. □

問題 6

1. $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積空間, $\|\ \|$ を $\langle\ ,\ \rangle$ により定まるノルムとする. このとき, $V \times V$ で定義された実数値関数 $d : V \times V \to \mathbf{R}$ を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x,\ y \in V)$$

により定める.

(1) 任意の $x,\ y \in V$ に対して, $d(x, y) \geq 0$ であり, 更に, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限ることを示せ. d のこの性質を正値性という.

(2) 任意の $x,\ y \in V$ に対して, $d(x, y) = d(y, x)$ であることを示せ. d のこの性質を対称性という.

(3) 任意の $x,\ y,\ z \in V$ に対して, 不等式

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

がなりたつことを示せ. この不等式を三角不等式という.

2. X を空でない集合とし, $X \times X$ で定義された実数値関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ が次の (a)〜(c) をみたすとする.

(a) 任意の $x,\ y \in X$ に対して, $d(x, y) \geq 0$ であり, 更に, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限る. (正値性)

(b) 任意の $x,\ y \in X$ に対して, $d(x, y) = d(y, x)$ である. (対称性)

(c) 任意の $x,\ y,\ z \in X$ に対して, 三角不等式

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

がなりたつ.

このとき, d を X の距離, $d(x, y)$ を x と y の距離, 組 (X, d) を距離空間という. 例えば, 問題 6.1 より, 内積空間は距離空間となる. 特に, Euclid 空間は距離空間となる.

(1) X を空でない集合とし, $X \times X$ で定義された実数値関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ を

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

により定める. このとき, 明らかに, d は正値性および対称性をみたす. d は三角不等式をみたすことを示せ. 特に, d は X の距離となる. d を離散距離, (X, d) を離散距離空間または離散空間という.

(2) (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とする. 任意の $x,\ y \in X$ に対して, 等式

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

がなりたつとき, f を等長写像という.

等長写像は単射であることを示せ. 特に, 定義 6.2 の $\mathbf{R}^n$ の等長変換の定義において, f の単射性の仮定は不要であることが分かる.

(3) (X, d) を距離空間とする. X 上の恒等写像 1_X は X から X への等長写像であることを示せ.

問題 6 の解答

1. (1) ノルムの正値性より, $\|x-y\| \geq 0$ であり, 更に, $\|x-y\| = 0$ となるのは $x-y=0$ のときに限る. すなわち, d の定義より, $d(x,y) \geq 0$ であり, 更に, $d(x,y)=0$ となるのは $x=y$ のときに限る.

(2) ノルムの性質より,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|(-1)(y-x)\| \\ &= |-1|\|y-x\| \\ &= 1 \cdot d(y,x) \\ &= d(y,x), \end{aligned}$$

すなわち, $d(x,y)=d(y,x)$ である.

(3) ノルムに関する三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x-z\| \\ &= \|(x-y)+(y-z)\| \\ &\leq \|x-y\| + \|y-z\| \\ &= d(x,y)+d(y,z), \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$$

である.

2. (1) $x,\ y,\ z \in X$ とする.

$x=z$ のとき, d の定義より,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= 0 \\ &\leq d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

である.

$x \neq z$ のとき, $x \neq y$ または $y \neq z$ だから, d の定義より, $d(x,y)=1$ または $d(y,z)=1$ である. よって, d の定義より,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= 1 \\ &\leq d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

である.

したがって, d は三角不等式をみたす.

(2) (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間, $f: X \to Y$ を X から Y への等長写像とする. $x,\ y \in X$, $f(x)=f(y)$ とすると, d_Y の正値性および等長写像の定義より,

$$\begin{aligned} 0 &= d_Y(f(x),f(y)) \\ &= d_X(x,y), \end{aligned}$$

すなわち, $d_X(x, y) = 0$ である. よって, d_X の正値性より, $x = y$ である. したがって, f は単射, すなわち, 等長写像は単射である.

(3) x, $y \in X$ とすると, 恒等写像の定義より, $1_X(x) = x$, $1_X(y) = y$ である. よって,

$$d(1_X(x), 1_X(y)) = d(x, y)$$

となるから, 1_X は等長写像である.