

§12. 2次超曲面の標準形

ここでは、2次超曲面

$${}^t xAx + 2{}^t bx + c = 0 \quad (1)$$

を \mathbf{R}^n の等長変換を用いて、標準形という理解しやすい形に変形することを考えよう。ただし、 $A \in \text{Sym}(n)$, $A \neq O$, $b, x \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ である。なお、 A が正則な場合は問題 11.1 も参考にする
とよい。

まず、定理 11.1 の証明を思い出そう。 $f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ に対して、 $P \in O(n)$ および $q \in \mathbf{R}^n$ を用いて、 f^{-1} を

$$f^{-1}(y) = Py + q \quad (y \in \mathbf{R}^n)$$

と表しておく。このとき、 $x = f^{-1}(y)$ を (1) に代入すると、2次超曲面

$${}^t y({}^t PAP)y + 2{}^t (Aq + b)Py + {}^t qAq + 2{}^t bq + c = 0 \quad (2)$$

が得られるのであった。ここで、 $A \in \text{Sym}(n)$ だから、 A の固有方程式の解はすべて実数であり、 A の固有値である。また、 $r = \text{rank } A$ とおくと、 $A \neq O$ だから、 $r = 1, 2, \dots, n$ である。特に、 $r = n$ となるのは A が正則なときである。そこで、 A の固有値を重複度も込めて、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする。ただし、

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \neq 0, \quad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0 \quad (3)$$

である。次は、(2) の左辺の第 2 項が 0 になるかどうかで場合分けを行おう。

定義 12.1 2次超曲面 (1) を考える。ある $q \in \mathbf{R}^n$ が存在し、

$$Aq + b = 0 \quad (4)$$

となるとき、(1) は有心であるという。(1) は有心でないとき、無心であるという。

(1) が有心な場合、(4) がなりたつように $q \in \mathbf{R}^n$ を選んでおくと、(2) は

$${}^t y({}^t PAP)y + {}^t qAq + 2{}^t bq + c = 0 \quad (5)$$

となる。よって、 $y \in \mathbf{R}^n$ が (5) の解ならば、 $-y$ も (5) の解である。すなわち、(5) が表す \mathbf{R}^n の部分集合は原点に関して対称である。したがって、(1) が表す \mathbf{R}^n の部分集合は点 q に関して対称である。これが「有心」という言葉の意味である。特に、 A が正則なとき、問題 11.1 で扱ったように、 $q = -A^{-1}b$ とおくと、(4) がなりたつから、(1) は有心である。

例 12.1 例 11.1, 例 11.2 で述べた楕円, 双曲線は有心である。

一方、例 11.3 で述べた放物線は無心である。

例 12.2 (楕円面) $a, b, c > 0$ とする。このとき、2次曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

は有心である。これを楕円面という。

例 12.3 (一葉双曲面) $a, b, c > 0$ とする。このとき、2次曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

は有心である。これを一葉双曲面という。

例 12.4 (二葉双曲面) $a, b, c > 0$ とする. このとき, 2次曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

は有心である. これを二葉双曲面という.

例 12.5 (楕円放物面) $a, b > 0$ とする. このとき, 2次曲面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

は無心である. これを楕円放物面という.

例 12.6 (双曲放物面) $a, b > 0$ とする. このとき, 2次曲面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

は無心である. これを双曲放物面という.

さて, (1) を有心2次超曲面とする. このとき, 上で述べたように, (1) は (5) に変形することができる. ここで, 対称行列は直交行列によって対角化可能だから, P を

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

となるように選んでおくことができる. このとき, (3) より, (5) は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + d = 0 \quad (7)$$

となる. ただし, y_1, y_2, \dots, y_n は y の成分, すなわち, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ であり,

$$d = {}^tqAq + 2{}^tbq + c \quad (8)$$

である. (7) を有心2次超曲面の標準形という.

次に, (1) を無心2次超曲面とする. まず, $r = n$, すなわち, A が正則であると仮定すると, (1) は有心となり矛盾である. よって, $r < n$ である.

ここで, 有心な場合と同様に, P を (6) がなりたつように選んでおくと, (2) は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 2(b'_1 y_1 + b'_2 y_2 + \cdots + b'_n y_n) + d = 0,$$

すなわち,

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1} \right)^2 + \cdots + \lambda_r \left(y_r + \frac{b'_r}{\lambda_r} \right)^2 + 2(b'_{r+1} y_{r+1} + \cdots + b'_n y_n) + d' = 0 \quad (9)$$

となる. ただし, y_1, y_2, \dots, y_n は y の成分であり, d は (8) により定め,

$$(b'_1, b'_2, \dots, b'_n) = {}^t(Aq + b)P, \quad d' = d - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b'_2)^2}{\lambda_2} - \cdots - \frac{(b'_r)^2}{\lambda_r}$$

である. よって, $z \in \mathbf{R}^n$ の成分を z_1, z_2, \dots, z_n とし,

$$z = g_1(y), \quad z_i = y_i + \frac{b'_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad z_i = y_i \quad (i = r+1, r+2, \dots, n)$$

とおくと, g_1 は \mathbf{R}^n の等長変換を定め, (9) は

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + 2(b'_{r+1} z_{r+1} + b'_{r+2} z_{r+2} + \dots + b'_n z_n) + d' = 0 \quad (10)$$

となる.

ここで, 仮定より, (1) は無心だから, $b'_{r+1}, b'_{r+2}, \dots, b'_n$ の内の少なくとも1つは0ではない. よって,

$$p = \sqrt{(b'_{r+1})^2 + (b'_{r+2})^2 + \dots + (b'_n)^2}$$

とおくと, $p > 0$ である. このとき, 例 10.5 より, ある $P' \in O(n-r)$ が存在し,

$$P' \begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ b'_{r+2} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

すなわち,

$$(b'_{r+1}, b'_{r+2}, \dots, b'_n) = (p, 0, \dots, 0)P' \quad (11)$$

となる. また,

$$P'' = \begin{pmatrix} E & O \\ O & P' \end{pmatrix}$$

とおくと, $P'' \in O(n)$ である. 更に,

$$u = g_2(z) = P''z$$

とおくと, g_2 は \mathbf{R}^n の等長変換を定め, $u \in \mathbf{R}^n$ の成分を u_1, u_2, \dots, u_n とすると, (11) より, (10) は

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_r u_r^2 + 2pu_{r+1} + d' = 0 \quad (12)$$

となる.

最後に, $v \in \mathbf{R}^n$ の成分を v_1, v_2, \dots, v_n とし,

$$v = g_3(u), \quad v_i = u_i \quad (i \neq r+1), \quad v_{r+1} = u_{r+1} + \frac{d'}{2p}$$

とおくと, g_3 は \mathbf{R}^n の等長変換を定め, (12) は

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \dots + \lambda_r v_r^2 + 2pv_{r+1} = 0 \quad (12)$$

となる. (12) を無心2次超曲面の標準形という.

注意 12.1 上の式変形において, 等長変換を表すときに用いる直交行列の行列式は, 必要ならば列の何れかを -1 倍することにより, すべて1とすることができる. よって, 2次超曲面は鏡映を用いずに, 回転と平行移動の合成のみで標準形に写すことができる.

問題 12

1. $A \in \text{Sym}(n)$, $A \neq O$, $b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とする.

(1) $P \in \text{GL}(n, \mathbf{R})$, $q \in \mathbf{R}^n$ とすると, 等式

$$\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ {}^tq & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tPAP & {}^tP(Aq+b) \\ {}^t(Aq+b)P & {}^tqAq + 2{}^tbq + c \end{pmatrix}$$

がなりたつことを示せ. 特に,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} {}^tPAP & {}^tP(Aq+b) \\ {}^t(Aq+b)P & {}^tqAq + 2{}^tbq + c \end{pmatrix}$$

であることが分かる.

(2) 2次超曲面

$${}^txAx + 2{}^tbx + c = 0 \tag{*}$$

に対して,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, (1) より, $\text{rank } \tilde{A}$ の値は 2次超曲面を \mathbf{R}^n の等長変換で写しても変わらない. 特に, $\text{rank } \tilde{A} = n + 1$ のとき, (*) は固有であるという.

固有な有心2次超曲面の標準形を求めよ.

(3) 固有な無心2次超曲面の標準形を求めよ.

(4) 固有2次曲線は空集合, 楕円, 双曲線, 放物線の何れかであることを示せ. なお, 固有でない2次曲線は有心であり, 空集合, 1点, 交わる2直線, 平行な2直線, 重なった2直線の何れかであることが分かる.

(5) 固有2次曲面は空集合, 楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 双曲放物面の何れかであることを示せ.

問題 12 の解答

1. (1) ${}^tA = A$ であることと 1 次行列は転置を取っても変わらないことに注意すると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ {}^tq & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AP & Aq + b \\ {}^tbP & {}^tbq + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tPAP & {}^tP(Aq + b) \\ {}^tqAP + {}^tbP & {}^tq(Aq + b) + {}^tbq + c \end{pmatrix} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

である. よって, 題意の等式がなりたつ.

(2) (*) は始めから標準形であるとしてよい.

(*) が標準形であり, 有心な場合, (*) は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + d = 0$$

と表される. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbf{R}$ である. このとき,

$$\begin{aligned} \text{rank } \tilde{A} &= \text{rank} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \lambda_r & & 0 \\ & & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} r + 1 & (d \neq 0), \\ r & (d = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

である. よって, $\text{rank } \tilde{A} = n + 1$ となるのは $r = n$, $d \neq 0$ のときである. したがって, 求める標準形は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 + d = 0$$

である. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である.

(3) (*) は始めから標準形であるとしてよい.

(*) が標準形であり, 無心な場合, (*) は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2px_{r+1} = 0$$

と表される. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $p > 0$ である. このとき,

$$\begin{aligned} \text{rank } \tilde{A} &= \text{rank} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \lambda_r & & 0 \\ & & 0 & & p \\ & & 0 & & 0 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= r + 2 \end{aligned}$$

である. よって, $\text{rank } \tilde{A} = n + 1$ となるのは $r = n - 1$ のときである. したがって, 求める標準形は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2 + 2px_n = 0$$

である. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, p > 0$ である.

(4) 標準形について考えればよい.

まず, (2) より, 固有な有心2次曲線の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + d = 0 \quad (\text{a})$$

と表される. ただし, $\lambda, \mu, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である.

λ, μ, d の符号がすべて同じとき, (a) をみたす $x, y \in \mathbf{R}$ は存在しない. すなわち, (a) は空集合を表す.

λ, μ の符号が同じであり, d の符号が λ, μ の符号と異なるとき, (a) は楕円を表す.

λ, μ の符号が異なるとき, (a) は双曲線を表す.

また, (3) より, 固有な無心2次曲線の標準形は

$$\lambda x^2 + 2py = 0$$

と表される. ただし, $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, p > 0$ である. これは放物線を表す.

よって, 固有2次曲線は空集合, 楕円, 双曲線, 放物線の何れかである.

(5) 標準形について考えればよい.

まず, (2) より, 固有な有心2次曲面の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + d = 0 \quad (\text{b})$$

と表される. ただし, $\lambda, \mu, \nu, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である.

λ, μ, ν, d の符号がすべて同じとき, (b) をみたす $x, y, z \in \mathbf{R}$ は存在しない. すなわち, (b) は空集合を表す.

λ, μ, ν の符号がすべて同じであり, d の符号が λ, μ, ν の符号と異なるとき, (b) は楕円面を表す.

λ, μ, ν の符号の内の2つが d の符号と同じであり, 残りの1つの符号が異なるとき, (b) は二葉双曲面を表す.

λ, μ, ν の符号の内の2つが d および残りの1つと符号が異なるとき, (b) は一葉双曲面を表す.

また, (3) より, 固有な無心2次曲面の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + 2pz = 0 \quad (\text{c})$$

と表される. ただし, $\lambda, \mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, p > 0$ である.

λ, μ の符号が同じとき, (c) は楕円放物面を表す.

λ, μ の符号が異なるとき, (c) は双曲放物面を表す.

よって, 固有2次曲面は空集合, 楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 双曲放物面の何れかである.