

§8. Stone-Weierstrass の定理

実数値連続関数全体の集合の部分多元環がある条件をみたしていると、任意の実数値連続関数を部分多元環の元で近似することができる。これが Stone-Weierstrass の定理である。

まず、上の条件に現れる言葉を用意しよう。

定義 8.1 X を位相空間, S を $C(X)$ の部分多元環とする。

異なる $x, y \in X$ に対して, $f(x) \neq f(y)$ となる $f \in S$ が存在するとき, S は x と y を分離するという。

$x \in X$ に対して, $f(x) \neq 0$ となる $f \in S$ が存在するとき, S は x で消滅しないという。

任意の異なる $x, y \in X$ および任意の異なる $a, b \in \mathbf{R}$ に対して, $f(x) = a$ かつ $f(y) = b$ となる $f \in S$ が存在するとき, S は 2 点固有性をもつという。

定義 8.1 に関して, 次がなりたつ。

定理 8.1 X を位相空間, S を $C(X)$ の部分多元環とすると, 次の (1), (2) は同値である。

- (1) S は任意の 2 点を分離し, 任意の点で消滅しない。
- (2) S は 2 点固有性をもつ。

証明 (1) \Rightarrow (2): まず, $x, y \in X, x \neq y$ とする。仮定より, S は x と y を分離し, x で消滅しないから, ある $u, v \in S$ が存在し,

$$u(x) \neq u(y), \quad v(x) \neq 0 \quad (*)$$

となる。 $\lambda \in \mathbf{R}$ とすると, S は $C(X)$ の部分多元環だから, $h \in S$ を

$$h = u + \lambda v$$

により定めることができる。ここで, $h(x) = h(y)$ となるのは

$$u(x) + \lambda v(x) = u(y) + \lambda v(y),$$

すなわち, (*) より,

$$v(x) \neq v(y), \quad \lambda = \frac{u(x) - u(y)}{v(y) - v(x)}$$

のときである。また, $h(x) = 0$ となるのは (*) より,

$$\lambda = -\frac{u(x)}{v(x)}$$

のときである。よって, λ を

$$h(x) \neq h(y), \quad h(x) \neq 0$$

となるように選んでおくことができる。このとき,

$$\alpha = (h(x))^2 - h(x)h(y)$$

とおくと, $\alpha \neq 0$ である。

次に, S は $C(X)$ の部分多元環だから, $f_1 \in S$ を

$$f_1 = \frac{1}{\alpha}(h^2 - h(y)h)$$

により定めることができる。このとき、 α の定義より、

$$f_1(x) = 1, \quad f_1(y) = 0$$

である。同様に、ある $f_2 \in S$ が存在し、

$$f_2(x) = 0, \quad f_2(y) = 1$$

となる。

更に、 $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$ とする。 S は $C(X)$ の部分多元環だから、 $f \in S$ を

$$f = af_1 + bf_2$$

により定めることができる。このとき、

$$f(x) = a, \quad f(y) = b$$

である。したがって、(2) がなりたつ。

(2) \Rightarrow (1): 定義 8.1 より、明らかである。 □

それでは、Stone-Weierstrass の定理について述べよう。

定理 8.2 (Stone-Weierstrass の定理) X をコンパクト空間、 S を $C(X)$ の部分多元環とする。 S が任意の 2 点を分離し、任意の点で消滅しないならば、 $\overline{S} = C(X)$ である。

証明 $f \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ とし、

$$B(f; \varepsilon) \cap \overline{S} \neq \emptyset$$

を示せばよい。

まず、 $x_0 \in X$ に対して、

$$S(x_0) = \{g \in S \mid f(x_0) = g(x_0)\}$$

とおく。仮定と定理 8.1 より、 S は 2 点固有性をもつから、 $S(x_0) \neq \emptyset$ である。ここで、 $g \in S(x_0)$ に対して、

$$U(g) = \{x \in X \mid g(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

とおく。 $x \in X$ とすると、 S は 2 点固有性をもつから、ある $g \in S$ が存在し、

$$g(x_0) = f(x_0), \quad g(x) = f(x)$$

となる。このとき、

$$g \in S(x_0), \quad x \in U(g)$$

である。また、 f, g は連続だから、 $U(g)$ は X の開集合である。よって、

$$\{U(g) \mid g \in S(x_0)\}$$

は X の開被覆である。 X はコンパクトだから、ある $g_1, g_2, \dots, g_n \in S(x_0)$ が存在し、

$$X = \bigcup_{i=1}^n U(g_i)$$

となる。ここで、問題 7-5 より、 $h \in \overline{S}$ を

$$h = \max(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

により定めることができる. このとき, $h(x_0) = f(x_0)$ であり, 任意の $x \in X$ に対して,

$$h(x) > f(x) - \varepsilon$$

である.

次に,

$$\bar{S}(\varepsilon) = \{h \in \bar{S} \mid \text{任意の } x \in X \text{ に対して, } h(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

とおく. 上で示したことから, $\bar{S}(\varepsilon) \neq \emptyset$ である. ここで, $h \in \bar{S}(\varepsilon)$ に対して,

$$V(h) = \{x \in X \mid h(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

とおく. $x_0 \in X$ とすると, 上で示したことから, ある $h \in \bar{S}(\varepsilon)$ が存在し, $x_0 \in V(h)$ となる. また, f, h は連続だから, $V(h)$ は X の開集合である. よって,

$$\{V(h) \mid h \in \bar{S}(\varepsilon)\}$$

は X の開被覆である. X はコンパクトだから, ある $h_1, h_2, \dots, h_m \in \bar{S}(\varepsilon)$ が存在し,

$$X = \bigcup_{j=1}^m V(h_j)$$

となる. ここで, 問題 7-5 より, $k \in \bar{S}$ を

$$k = \min(h_1, h_2, \dots, h_m)$$

により定めることができる. このとき, 任意の $x \in X$ に対して,

$$|f(x) - k(x)| < \varepsilon$$

である. X はコンパクトだから,

$$d(f, k) < \varepsilon$$

である. したがって,

$$B(f; \varepsilon) \cap \bar{S} \neq \emptyset$$

である. □

有界閉区間で定義された実数値連続関数については, 次が成り立つ.

定理 8.3 (Weierstrass の多項式近似定理) I を有界閉区間とする. 任意の $f \in C(I)$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある実数係数の多項式 P が存在し, 任意の $x \in [a, b]$ に対して,

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

となる.

証明 S を多項式で表される $C(I)$ の元全体の集合とする. $\bar{S} = C(I)$ を示せばよい.

まず, S は $C(I)$ の部分多元環となる. 次に, 1 次関数は S の元だから, S は任意の 2 点を分離する. 更に, 定数関数は S の元だから, S は任意の点で消滅しない. よって, Stone-Weierstrass の定理より, $\bar{S} = C(I)$ である. □

問題 8

1. $x, y \in \mathbf{R}$ に対して, $x - y \in \mathbf{Z}$ となるとき, $x \sim y$ であると定める. このとき, \sim は \mathbf{R} 上の同値関係であることが分かる. \mathbf{R}/\sim を \sim による \mathbf{R} の商集合とする.

(1) $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ を単位円とする. このとき, 写像 $\varphi: \mathbf{R}/\sim \rightarrow S^1$ を

$$\varphi([x]) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定めることができる. \mathbf{R}/\sim の商位相および S^1 の相対位相に関して, φ は同相写像であることを示せ.

(2) (1) より, \mathbf{R}/\sim と S^1 を φ によって同一視すると,

$$C(S^1) = \{f \in C(\mathbf{R}) \mid \text{任意の } x \in \mathbf{R} \text{ に対して, } f(x+1) = f(x)\}$$

と表すことができる. このとき,

$$\sum_{n=0}^N (a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x) \quad (a_n, b_n \in \mathbf{R})$$

と表される $C(S^1)$ の元を三角多項式という. S を三角多項式全体の集合とすると, $\overline{S} = C(S^1)$ であることを示せ.

2. $n \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して, 多項式で表される $C[0, 1]$ の元 $\varphi_{n,k}$ を

$$\varphi_{n,k}(x) = {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} \quad (x \in [0, 1])$$

により定める. ただし, ${}_n C_k$ は二項係数である. 更に, x を固定しておき, t の関数 φ を

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \varphi_{n,k}(x) t^k$$

により定める.

(1) $\varphi(1)$, $\varphi'(1)$, $\varphi''(1)$ を計算することにより, 等式

$$\sum_{k=0}^n \varphi_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=1}^n k \varphi_{n,k}(x) = nx, \quad \sum_{k=2}^n k(k-1) \varphi_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$$

がなりたつことを示せ.

(2) $\delta > 0$ とすると, 不等式

$$\sum_{|\frac{k}{n}-x| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

がなりたつことを示せ. ただし, 左辺は $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$ をみたす $k = 0, 1, 2, \dots, n$ についての和を表す.

(3) $f \in C[0, 1]$, $n \in \mathbf{N}$ に対して, 多項式で表される $C[0, 1]$ の元 f_n を

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi_{n,k}(x)$$

により定める. f_n を Bernstein 多項式という. $C[0, 1]$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束することを示せ.

問題 8 の解答

1. (1) まず, $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\sim$ を自然な射影とし, 写像 $\psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ を

$$\psi(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, ψ は連続であり, $\varphi \circ p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ は ψ の値域を S^1 に制限したものに一致する. よって, $\varphi \circ p$ は連続である. 更に, 商位相の定義より, φ は連続である.

次に, \sim の定義より,

$$p([0, 1]) = \mathbf{R}/\sim$$

である. ここで, p は連続であり, $[0, 1]$ はコンパクトだから, \mathbf{R}/\sim はコンパクトである. また, S^1 は Hausdorff 空間 \mathbf{R}^2 の部分空間だから, Hausdorff である. 更に, φ は定義より, 全単射である. したがって, φ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への全単射連続写像となるから, 同相写像である.

(2) まず, $f, g \in S, c \in \mathbf{R}$ とすると, S の定義より, $f+g, cf \in S$ である. また, 加法定理より, $fg \in S$ である. よって, S は $C(S^1)$ の部分多元環である.

ここで, $x, y \in \mathbf{R}, x \not\sim y$ とすると,

$$\cos 2\pi x \neq \cos 2\pi y$$

または

$$\sin 2\pi x \neq \sin 2\pi y$$

だから, S は任意の 2 点を分離する. また, 定数関数は S の元だから, S は任意の点で消滅しない. したがって, Stone-Weierstrass の定理より, $\bar{S} = C(S^1)$ である.

2. (1) 二項定理より,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^n \varphi_{n,k}(x)t^k \\ &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (tx)^k (1-x)^{n-k} \\ &= (tx + 1 - x)^n, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\sum_{k=0}^n \varphi_{n,k}(x)t^k = (tx + 1 - x)^n \quad (*)$$

である.

まず, (*) に $t = 1$ を代入すると, 第 1 式が得られる.

次に, (*) の両辺を t で微分すると,

$$\sum_{k=1}^n k \varphi_{n,k}(x)t^{k-1} = nx(tx + 1 - x)^{n-1}$$

である. $t = 1$ を代入すると, 第 2 式が得られる.

更に, (*) の両辺を t で 2 回微分すると,

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)\varphi_{n,k}(x)t^{k-2} = n(n-1)x^2(tx + 1 - x)^{n-2}$$

である. $t = 1$ を代入すると, 第 3 式が得られる.

(2) (1) より,

$$\begin{aligned} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \varphi_{n,k}(x) &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \varphi_{n,k}(x) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^2\delta^2} \{k(k-1) + k - 2nkx + n^2x^2\} \varphi_{n,k}(x) \\ &= \frac{1}{n^2\delta^2} \{n(n-1)x^2 + nx - 2nx \cdot nx + n^2x^2 \cdot 1\} \\ &= \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \\ &\leq \frac{1}{4n\delta^2} \end{aligned}$$

である. よって, あたえられた不等式がなりたつ.

(3) $\varepsilon > 0$ とする. f はコンパクト集合 $[0, 1]$ で定義された連続関数だから, 一様連続である. よって, ある $\delta > 0$ が存在し, $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$ ならば,

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. このとき, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbf{N}$ とすると, (1), (2) より,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \varphi_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \varphi_{n,k}(x) \\ &= \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \varphi_{n,k}(x) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \varphi_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{k=0}^n \varphi_{n,k}(x) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \left(|f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \right) \varphi_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + 2\|f\| \cdot \frac{1}{4n\delta^2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|}{2n\delta^2} \end{aligned}$$

である. ここで, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$\frac{\|f\|}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. このとき,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

である. したがって, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束する.