

## §9. Urysohn の補題

ここでは、互いに素な閉集合を実数値連続関数を用いて区別することを考えよう。まず、第4分離公理について思い出しておく。

**定義 9.1**  $X$  を位相空間とする。  $X$  の互いに素な任意の閉集合  $A, B$  が開集合により分離される時、すなわち、  $X$  のある開集合  $O_A, O_B$  が存在し、

$$A \subset O_A, \quad B \subset O_B, \quad O_A \cap O_B = \emptyset$$

となる時、  $X$  は第4分離公理または Tietze の分離公理をみたすという。

第4分離公理をみたす位相空間を  $T_4$  空間または Tietze 空間という。

まず、  $T_4$  空間に関して、次がなりたつ。

**定理 9.1**  $X$  を位相空間とすると、次の (1), (2) は同値である。

(1)  $X$  は  $T_4$  空間である。

(2)  $A, U$  を  $A \subset U$  となる  $X$  の閉集合、開集合とする。このとき、  $X$  のある開集合  $V$  が存在し、  $A \subset V$  かつ  $\bar{V} \subset U$  となる。

**証明** (1) $\Rightarrow$ (2):  $A \subset U$  より、

$$A \cap U^c = \emptyset$$

である。ただし、  $U^c$  は  $X$  を全体集合としたときの  $U$  の補集合を表す。  $U$  は  $X$  の開集合だから、  $U^c$  は  $X$  の閉集合である。ここで、  $X$  は  $T_4$  空間だから、  $X$  のある開集合  $V, W$  が存在し、

$$A \subset V, \quad U^c \subset W, \quad V \cap W = \emptyset$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} V &\subset W^c \\ &\subset U \end{aligned}$$

となる。更に、  $W^c$  は  $X$  の閉集合だから、  $\bar{V} \subset U$  である。

(2) $\Rightarrow$ (1):  $A, B$  を  $X$  の互いに素な閉集合とする。このとき、  $B^c$  は  $X$  の開集合であり、  $A \subset B^c$  である。よって、仮定より、  $X$  のある開集合  $O$  が存在し、  $A \subset O$  かつ  $\bar{O} \subset B^c$  となる。ここで、  $O' = (\bar{O})^c$  とおくと、  $O'$  は  $X$  の開集合であり、

$$B \subset O', \quad O \cap O' = \emptyset$$

となる。よって、  $X$  は  $T_4$  空間である。 □

また、次がなりたつ。

**定理 9.2**  $X$  を  $T_4$  空間、  $A, B$  を  $X$  の互いに素な空でない閉集合とする。また、集合  $D_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) および  $D$  を

$$D_n = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m = 0, 1, 2, \dots, 2^n \right\}, \quad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

により定める。このとき、次の (1), (2) をみたす  $X$  の開集合からなる集合族  $(U_t)_{t \in D}$  が存在する。

(1) 任意の  $t \in D_n$  に対して、  $A \subset U_t$  かつ  $\bar{U}_t \subset B^c$ 。

(2)  $s, t \in D_n$ ,  $s < t$  ならば、  $\bar{U}_s \subset U_t$ 。

**証明**  $n$  に関する数学的帰納法により示す.

まず,  $A, B$  に対する仮定より,  $B^c$  は  $X$  の開集合であり,  $A \subset B^c$  である. よって, 定理 9.1 において  $A = A, U = B^c$  とすると,  $X$  のある開集合  $U_0$  が存在し,

$$A \subset U_0, \quad \overline{U_0} \subset B^c$$

となる. 次に, 定理 9.1 において  $A = \overline{U_0}, U = B^c$  とすると,  $X$  のある開集合  $U_1$  が存在し,

$$\overline{U_0} \subset U_1, \quad \overline{U_1} \subset B^c$$

となる. 更に, 定理 9.1 において  $A = \overline{U_0}, U = U_1$  とすると,  $X$  のある開集合  $U_{\frac{1}{2}}$  が存在し,

$$\overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{2}}, \quad \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_1$$

となる. したがって,  $n = 1$  のとき, 定理がなりたつ.

$n = k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) のとき, 定理がなりたつと仮定する. まず,

$$D_{k+1} \setminus D_k = \left\{ \frac{2m-1}{2^{k+1}} \mid m = 1, 2, \dots, 2^k \right\}$$

であることに注意する. 定理 9.1 において  $A = \overline{U_{\frac{m-1}{2^k}}}, U = U_{\frac{m}{2^k}}$  とすると,  $X$  のある開集合  $U_{\frac{2m-1}{2^{k+1}}}$  が存在し,

$$\overline{U_{\frac{m-1}{2^k}}} \subset U_{\frac{2m-1}{2^{k+1}}}, \quad \overline{U_{\frac{2m-1}{2^{k+1}}}} \subset U_{\frac{m}{2^k}}$$

となる. よって,  $n = k+1$  のとき, 定理がなりたつ.

以上より, 定理がなりたつ. □

**注意 9.1** 定理 9.2 の証明は厳密には選択公理を用いる必要がある.

始めに述べたことに関して, 次がなりたつ.

**定理 9.3 (Urysohn の補題)**  $X$  を  $T_4$  空間,  $A, B$  を  $X$  の互いに素な空でない閉集合とする. このとき, ある  $f \in C(X)$  が存在し,

$$f(X) \subset [0, 1], \quad f(A) = \{0\}, \quad f(B) = \{1\}$$

となる.

**証明** まず,  $(U_t)_{t \in D}$  を定理 9.2 の集合族とし, 関数  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\text{任意の } t \in D \text{ に対して, } x \notin U_t), \\ \inf\{t \in D \mid x \in U_t\} & (\text{ある } t \in D \text{ に対して, } x \in U_t) \end{cases}$$

により定める. このとき,

$$f(X) \subset [0, 1]$$

である. また,  $A \subset U_0$  だから,  $f(A) = \{0\}$  である. 更に, 任意の  $t \in D$  に対して,  $\overline{U_t} \subset B^c$  だから,

$$B \cap \left( \bigcup_{t \in D} U_t \right) = \emptyset$$

となる. よって,  $f(B) = \{1\}$  である.

次に,  $\alpha \in \mathbf{R}$  に対して,

$$L_\alpha = \{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$$

とおくと,

$$L_\alpha = \begin{cases} \emptyset & (\alpha \leq 0), \\ X & (\alpha > 1) \end{cases}$$

である. ここで,  $0 < \alpha \leq 1$  のとき,

$$L'_\alpha = \bigcup_{t < \alpha} U_t$$

とおく.  $x \in L_\alpha$  とすると, ある  $t \in D$  が存在し,

$$f(x) < t < \alpha$$

となる.  $f$  の定義と  $U_t$  の性質より,  $x \in U_t$  だから,  $x \in L'_\alpha$  である. 逆に,  $x \in L'_\alpha$  とすると, ある  $t \in D$  が存在し,

$$t < \alpha, \quad x \in U_t$$

となる. よって,  $f$  の定義より,  $f(x) \leq t$  であり,  $x \in L_\alpha$  となる. したがって,  $L_\alpha = L'_\alpha$  である. また,

$$R_\alpha = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$$

とおくと,

$$R_\alpha = \begin{cases} \emptyset & (\alpha \geq 1), \\ X & (\alpha < 0) \end{cases}$$

である. ここで,  $0 \leq \alpha < 1$  のとき,

$$R'_\alpha = \left( \bigcap_{t > \alpha} \bar{U}_t \right)^c$$

とおく.  $x \in R_\alpha$  とすると, ある  $s, t \in D$  が存在し

$$\alpha < s < t < f(x)$$

となる.  $f$  の定義より,  $x \notin U_t$  であり,  $U_t$  の性質より,  $x \notin \bar{U}_s$  だから,  $x \in R'_\alpha$  である. 逆に,  $x \in R'_\alpha$  とすると, ある  $t \in D$  が存在し,

$$t > \alpha, \quad x \notin \bar{U}_t$$

となる. よって,  $f$  の定義と  $U_t$  の性質より,  $f(x) \geq t$  であり,  $x \in R_\alpha$  となる. したがって,  $R_\alpha = R'_\alpha$  である.

以上より,  $L_\alpha, R_\alpha$  は  $X$  の開集合だから,  $f$  は連続, すなわち,  $f \in C(X)$  である.  $\square$

**注意 9.1** 定理 9.3 において, 任意の  $A, B$  に対して, 上の条件をみたす  $f$  が存在するならば,  $X$  は  $T_4$  空間となる. 実際,

$$O_A = \left\{ x \in X \mid f(x) < \frac{1}{2} \right\}, \quad O_B = \left\{ x \in X \mid f(x) > \frac{1}{2} \right\}$$

とおくと,  $O_A, O_B$  は  $A, B$  を分離する  $X$  の開集合となるからである.

## 問題 9

1.  $(X, d)$  を距離空間とし,  $x \in X, A \subset X, A \neq \emptyset$  とする. このとき,

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

とおく.  $d(x, A)$  を  $x$  と  $A$  の距離という.

(1)  $d(x, A) = 0$  と  $x \in \bar{A}$  は同値であることを示せ.

(2) 更に,  $y \in X$  とすると, 不等式

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

がなりたつことを示せ. 特に, 関数  $d(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbf{R}$  は連続となる.

(3)  $A, B$  を  $X$  の互いに素な空でない閉集合とする. このとき, (2) より, 連続関数  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = d(x, A) - d(x, B) \quad (x \in X)$$

により定めることができる.  $f$  を用いることにより,  $X$  は  $T_4$  空間であることを示せ. 特に,  $X$  は第 1 分離公理もみたす, すなわち, 任意の異なる  $x, y \in X$  に対して,  $X$  のある開集合  $O, O'$  が存在し,  $x \in O, y \notin O, x \notin O', y \in O'$  となるから,  $X$  は正規である. すなわち, 距離空間は正規である.

(4)  $x \in X$  とし,  $A, B$  を  $X$  の互いに素な空でない閉集合とすると,

$$d(x, A) + d(x, B) > 0$$

であることを示せ.

(5) (4) より, 関数  $g : X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$g(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \quad (x \in X)$$

により定めることができる.  $g$  は連続であることを示せ. 特に, 距離空間に対して, Urysohn の補題がなりたつことが分かる.

2.  $X$  を位相空間とする. 任意の  $x \in X$  および  $x \notin A$  となる  $X$  の任意の閉集合  $A$  に対して, ある連続関数  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  が存在し,

$$f(X) \subset [0, 1], \quad f(x) = 0, \quad f(A) = \{1\}$$

となるとき,  $X$  は分離公理  $T_{3\frac{1}{2}}$  または Tychonoff の分離公理をみたすという. 第一分離公理および分離公理  $T_{3\frac{1}{2}}$  をみたす位相空間は完全正則であるという. 完全正則な位相空間を完全正則空間または Tychonoff 空間という. なお, 分離公理  $T_{3\frac{1}{2}}$  のみをみたす位相空間を完全正則空間ということもある.

(1) 正規空間は完全正則であることを示せ.

(2) 完全正則空間は正則であることを示せ.

## 問題 9 の解答

1. (1) まず,  $d(x, A) = 0$  であると仮定する. このとき, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $d(x, y) < \varepsilon$  となる  $y \in A$  が存在する. よって,

$$B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

となり,  $x$  は  $A$  の外点ではない. したがって,  $x \in \bar{A}$  である.

上の議論は逆に辿ることもできるから,  $x \in \bar{A}$  ならば,  $d(x, A) = 0$  である.

以上より,  $d(x, A) = 0$  と  $x \in \bar{A}$  は同値である.

- (2)  $z \in A$  とすると,  $d(x, A)$  の定義および三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq d(x, z) \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

である. よって,

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, z)$$

である.  $z$  に関して下限を取ると,

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A),$$

すなわち,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

である. 同様に,

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$$

である. したがって, あたえられた不等式がなりたつ.

- (3)  $O_A, O_B \subset X$  を

$$O_A = \{x \in X \mid f(x) < 0\}, \quad O_B = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$$

により定める.  $f$  は連続だから,  $O_A, O_B$  は  $X$  の互いに素な開集合である.

ここで,  $x \in A$  とする. このとき,  $d(x, A) = 0$  である. また,  $A, B$  は互いに素であるから,  $x \notin B$  である. 更に,  $B$  は  $X$  の閉集合, すなわち,  $B = \bar{B}$  だから, (1) より,  $d(x, B) > 0$  である. よって,  $f(x) < 0$  となり,  $x \in O_A$  である.

同様に,  $x \in B$  とすると,  $x \in O_B$  である.

したがって,  $A \subset O_A, B \subset O_B$  となり,  $A$  と  $B$  は開集合により分離される. すなわち,  $X$  は  $T_4$  空間である.

- (4) まず,  $x \in A$  とすると, (3) で示したことより,  $d(x, B) > 0$  である.

同様に,  $x \in B$  とすると,  $d(x, A) > 0$  である.

更に,  $x \in X \setminus (A \cup B)$  とすると,  $d(x, A), d(x, B) > 0$  である.

よって,  $x \in X$  とすると,

$$d(x, A) + d(x, B) > 0$$

である.

- (5)  $x, y \in X$  とすると,

$$\begin{aligned}
g(x) - g(y) &= \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} - \frac{d(y, A)}{d(y, A) + d(y, B)} \\
&= \frac{d(x, A)(d(y, A) + d(y, B)) - d(y, A)(d(x, A) + d(x, B))}{(d(x, A) + d(x, B))(d(y, A) + d(y, B))} \\
&= \frac{d(x, A)d(y, B) - d(x, B)d(y, A)}{(d(x, A) + d(x, B))(d(y, A) + d(y, B))}
\end{aligned}$$

である。ここで、三角不等式および (2) より、

$$\begin{aligned}
&|d(x, A)d(y, B) - d(x, B)d(y, A)| \\
&= |(d(x, A) - d(y, A))d(y, B) + d(y, A)(d(y, B) - d(x, B))| \\
&\leq |(d(x, A) - d(y, A))d(y, B)| + |d(y, A)(d(y, B) - d(x, B))| \\
&\leq d(x, y)(d(y, A) + d(y, B))
\end{aligned}$$

である。よって、

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{d(x, y)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

となる。更に、 $\varepsilon > 0$  とし、 $\delta > 0$  を

$$\delta = \varepsilon(d(x, A) + d(x, B))$$

により定める。このとき、 $d(x, y) < \delta$  ならば、

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

となる。したがって、 $g$  は  $x$  で連続である。更に、 $x$  は任意だから、 $g$  は連続である。

2. (1)  $X$  を正規空間とし、 $x \in X$  とする。また、 $A$  を  $x \notin A$  となる  $X$  の空でない閉集合とする。まず、 $X$  は正規だから、第一分離公理をみたま。特に、 $\{x\}$  は  $X$  の閉集合である。また、 $X$  は正規だから、 $T_4$  空間である。よって、Urysohn の補題より、ある連続関数  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  が存在し、

$$f(X) \subset [0, 1], \quad f(x) = 0, \quad f(A) = \{1\} \quad (*)$$

となる。したがって、 $X$  は完全正則である。すなわち、正規空間は完全正則である。

- (2)  $X$  を完全正則空間とし、 $x \in X$  とする。また、 $A$  を  $x \notin A$  となる  $X$  の空でない閉集合とする。このとき、ある連続関数  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  が存在し、(\*) がなりたつ。ここで、

$$O_x = \left\{ y \in X \mid f(y) < \frac{1}{2} \right\}, \quad O_A = \left\{ y \in X \mid f(y) > \frac{1}{2} \right\}$$

とおく。 $f$  は連続だから、 $O_x, O_A$  は  $X$  の開集合であり、

$$x \in O_x, \quad A \subset O_A, \quad O_x \cap O_A = \emptyset$$

となる。よって、 $x$  と  $A$  は開集合により分離される。したがって、 $X$  は正則である。すなわち、完全正則空間は正則である。