## §10. 面積分

$\mathbf{R}^3$ 内の曲面とその曲面上で定義されたスカラー場またはベクトル場に対して, 面積分というものを考えることができる.

まず, スカラー場の面積分から定義しよう.

**定義 10.1** $D$ を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な領域とし, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

および $p$ の像で連続なスカラー場 $\varphi$ に対して,

$$\iint_p \varphi\, dA = \iint_D \varphi(p(u,v))\|p_u \times p_v\|\, dudv$$

とおき, これを $\varphi$ の $p$ 上の面積分という.

**注意 10.1** 定義 10.1 において, 特に, $\varphi = 1$ とすると, 上の面積分の値は $p$ の面積に等しい. また, 変数変換公式より, 面積分の値は曲面の径数表示に依存しないことが分かる.

**例 10.1** $D$ を

$$D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \,|\, v \geq 0,\ u^2 + v^2 \leq 1\}$$

により定められる $\mathbf{R}^2$ の領域, $f$ を

$$f(u,v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \quad ((u,v) \in D)$$

により定められる 2 変数のスカラー値関数とし, 原点中心, 半径 1 の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3 \quad ((u,v) \in D)$$

を $f$ のグラフ

$$p(u,v) = (u,\ v,\ f(u,v)) \quad ((u,v) \in D)$$

として表しておく.

また, $(u,v) \in D \setminus \{0\}$ に対して,

$$\varphi(p(u,v)) = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

とおく. 以下では, 広義の重積分が現れることがあるが, 気にしないで形式的に計算を行うことにする.

まず, §9 において扱ったことより,

$$\begin{aligned}\|p_u \times p_v\| &= \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{u^2}{1 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{1 - u^2 - v^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\end{aligned}$$

である. また, 極座標変換を用いると, $D$ は領域

$$E = \{(r,\theta) \,|\, 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

へ写される. よって,

$$\begin{aligned}
\iint_p \varphi\, dA &= \iint_D \frac{v}{u^2+v^2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\, dudv \\
&= \iint_E \frac{r\sin\theta}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\, drd\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^1 \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}\, drd\theta \\
&= \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \\
&= \left[\sin^{-1} r\right]_0^1 [-\cos\theta]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot 2 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

である.

　次に, ベクトル場の面積分を定義しよう.

**定義 10.2**　$D$ を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な領域とし, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

および $p$ の像で連続な 3 次元ベクトル場 $F$ に対して,

$$\iint_p F\, \overrightarrow{dA} = \iint_D \langle F(p(u,v)), p_u \times p_v \rangle\, dudv$$

とおき, これを $F$ の $p$ 上の面積分という.

**注意 10.2**　定義 10.2 において, $\nu$ を $p$ の単位法ベクトルとすると,

$$\nu = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}$$

だから, ベクトル場 $F$ の面積分はスカラー場 $\langle F, \nu\rangle$ の面積分に等しい. 実際,

$$\begin{aligned}
\iint_p F\, \overrightarrow{dA} &= \iint_D \left\langle F(p(u,v)), \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} \right\rangle \|p_u \times p_v\|\, dudv \\
&= \iint_p \langle F, \nu\rangle\, dA
\end{aligned}$$

である.

**例 10.2**　例 10.1 と同じ球面の一部 $p$ を考え, 3 次元ベクトル場 $F$ を

$$F(x,y,z) = (0,\, 0,\, z) \quad ((x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める.

　問題 7-1 より,

$$\begin{aligned}
p_u \times p_v &= (-f_u,\, -f_v,\, 1) \\
&= \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\, 1 \right)
\end{aligned}$$

である. よって, 例 10.1 と同じ極座標変換を用いると,

$$
\begin{aligned}
\iint_p F\,\overrightarrow{dA} &= \iint_D \left\langle (0,\,0,\,\sqrt{1-u^2-v^2}), \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\, 1 \right) \right\rangle dudv \\
&= \iint_D \sqrt{1-u^2-v^2}\,dudv \\
&= \iint_E \sqrt{1-r^2}\,r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,drd\theta \\
&= \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr \int_0^{\pi} d\theta \\
&= \left[ -\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \cdot \pi \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

である.

上の面積分の値が曲面の径数表示に依存しないことを次の例の場合に直接確かめてみよう. まず, 上の球面の一部は

$$
D' = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi],
$$

$$
q(u,v) = (\sin u \cos v,\, \sin u \sin v,\, \cos u) \quad ((u,v) \in D')
$$

と径数表示することができる. このとき, 問題 7-2 より,

$$
q_u \times q_v = (\sin u)(\sin u \cos v,\, \sin u \sin v,\, \cos u)
$$

である. よって,

$$
\begin{aligned}
\iint_q F\,\overrightarrow{dA} &= \iint_{D'} \langle (0,\,0,\,\cos u), (\sin u)(\sin u \cos v,\, \sin u \sin v,\, \cos u) \rangle\,dudv \\
&= \iint_{D'} \sin u \cos^2 u\,dudv \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos^2 u\,dudv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos^2 u\,du \int_0^{\pi} dv \\
&= \left[ -\frac{1}{3}\cos^3 u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

となり, これは上で求めた値と一致する.

## 問題 10

**1.** $a > 0$ とし, 原点中心, 半径 $a$ の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi],$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v,\ a \sin u \sin v,\ a \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. このとき,

$$p_u \times p_v = (a^2 \sin u)(\sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos u)$$

である.

(1) $p$ の像で定義されたスカラー場 $\varphi$ を

$$\varphi(p(u, v)) = \frac{\sin v}{\sin u} \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. 面積分 $\displaystyle\iint_p \varphi\, dA$ の値を求めよ.

(2) $b \in \mathbf{R}$ とし, 3 次元ベクトル場 $F$ を

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^b (x,\ y,\ z) \quad ((x,\ y,\ z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. 面積分 $\displaystyle\iint_p F\, \overrightarrow{dA}$ の値を求めよ.

**2.** $0 < a < b$ とし, トーラス

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = ((b + a \cos u) \cos v,\ (b + a \cos u) \sin v,\ a \sin u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. このとき, 問題 9-2 より,

$$p_u \times p_v = -a(b + a \cos u)(\cos u \cos v,\ \cos u \sin v,\ \sin u)$$

である.

(1) スカラー場 $\varphi$ を

$$\varphi(x, y, z) = z^2 \quad ((x,\ y,\ z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. 面積分 $\displaystyle\iint_p \varphi\, dA$ の値を求めよ.

(2) 3 次元ベクトル場 $F$ を

$$F(x, y, z) = (x,\ y,\ z) \quad ((x,\ y,\ z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. 面積分 $\displaystyle\iint_p F\, \overrightarrow{dA}$ の値を求めよ.

### 問題 10 の解答

**1.** (1) まず,

$$\|p_u \times p_v\| = a^2 \sin u$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\iint_p \varphi\, dA &= \iint_D \frac{\sin v}{\sin u} a^2 \sin u\, dudv \\ &= a^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v\, dudv \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{\pi} \sin v\, dv \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 \cdot [-\cos v]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 \cdot 2 \\ &= \pi a^2\end{aligned}$$

である.

(2) まず,

$$\|p(u,v)\|^2 = a^2$$

だから,

$$\begin{aligned}\langle F(p(u,v)), p_u \times p_v\rangle &= \langle (a^2)^b p(u,v), (a \sin u) p(u,v)\rangle \\ &= a^{2b+3} \sin u\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\iint_p F\, \overrightarrow{dA} &= \iint_D a^{2b+3} \sin u\, dudv \\ &= a^{2b+3} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, dudv \\ &= a^{2b+3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, du \int_0^{\pi} dv \\ &= a^{2b+3} [-\cos u]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi \\ &= \pi a^{2b+3}\end{aligned}$$

である.

**2.** (1) まず,

$$\|p_u \times p_v\| = a(b + a \cos u)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\iint_p \varphi\, dA &= \iint_D (a \sin u)^2 a (b + a \cos u) dudv \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (b \sin^2 u + a \sin^2 u \cos u)\, dudv\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^3 \int_0^{2\pi} \left( b \frac{1-\cos 2u}{2} + a \sin^2 u \cos u \right) du \int_0^{2\pi} dv \\
&= a^3 \left[ b \left( \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u \right) + \frac{a}{3} \sin^3 u \right]_0^{2\pi} \cdot 2\pi \\
&= 2\pi^2 a^3 b
\end{aligned}
$$

である.

(2) まず,

$$
\begin{aligned}
\langle F(p(u,v)), p_u \times p_v \rangle &= \langle ((b + a\cos u)\cos v,\ (b + a\cos u)\sin v,\ a\sin u), \\
&\qquad - a(b + a\cos u)(\cos u \cos v,\ \cos u \sin v,\ \sin u) \rangle \\
&= -a(b + a\cos u)\{(b + a\cos u)\cos u + a\sin^2 u\} \\
&= -a(b + a\cos u)(a + b\cos u) \\
&= -a\{ab + (a^2 + b^2)\cos u + ab\cos^2 u\}
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$
\begin{aligned}
\iint_p F\, \overrightarrow{dA} &= -a \iint_D \{ab + (a^2 + b^2)\cos u + ab\cos^2 u\}\, dudv \\
&= -a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ ab + (a^2 + b^2)\cos u + ab \frac{1 + \cos 2u}{2} \right\} dudv \\
&= -a \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{3}{2} ab + (a^2 + b^2)\cos u + \frac{1}{2} ab \cos 2u \right\} du \int_0^{2\pi} dv \\
&= -a \left[ \frac{3}{2} abu + (a^2 + b^2)\sin u + \frac{1}{4} ab \sin 2u \right]_0^{2\pi} \cdot 2\pi \\
&= -6\pi^2 a^2 b
\end{aligned}
$$

である.