§5. 直交行列

直交行列については線形代数でも扱うが, 後でもしばしば現れることになるため, ここで改めて述べておこう. まず, 直交行列の定義から始める.

定義 5.1　A を実正方行列とする. A が等式

$$A\,{}^t\!A = {}^t\!AA = E$$

をみたすとき, A を直交行列という. ただし, E は A と同じ型の単位行列である.

注意 5.1　定義 5.1 において, 直交行列は $A\,{}^t\!A = E$ または ${}^t\!AA = E$ の何れか一方をみたす A であると定めてもよいことが分かる. また, ${}^t({}^t\!A) = A$ だから, A が直交行列ならば, ${}^t\!A$ も直交行列である. 更に, A が直交行列ならば, A は正則であり, $A^{-1} = {}^t\!A$ である.

例 5.1　単位行列 E は実正方行列であり,

$$\begin{aligned} E\,{}^t\!E &= {}^t\!E \\ &= E, \end{aligned}$$

すなわち, $E\,{}^t\!E = E$ である. よって, E は直交行列である.

n 次の直交行列全体の集合を $\mathrm{O}(n)$ と表す. 1 次および 2 次の直交行列は次のように具体的に求めることができる.

例 5.2　x についての方程式

$$x^2 = 1$$

を解くと, $x = \pm 1$ である. よって,

$$\mathrm{O}(1) = \{(1), (-1)\} = \{\pm 1\}$$

である.

例 5.3　$A \in \mathrm{O}(2)$ とし,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a,\, b,\, c,\, d \in \mathbf{R})$$

と表しておく. このとき, 直交行列の定義より, ${}^t\!AA = E$, すなわち,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. 左辺を計算し, 両辺の各成分を比較すると,

$$a^2 + c^2 = 1, \quad ab + cd = 0, \quad b^2 + d^2 = 1 \tag{$*$}$$

である. $(*)$ の第 1 式と第 3 式より, ある $\theta,\, \varphi \in [0, 2\pi)$ が存在し,

$$a = \cos\theta, \quad c = \sin\theta, \quad b = \sin\varphi, \quad d = \cos\varphi$$

と表すことができる. 更に, $(*)$ の第 2 式と加法定理より,

$$\sin(\theta + \varphi) = 0$$

である．ここで, $0 \leq \theta + \varphi < 4\pi$ だから,

$$\theta + \varphi = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$$

である．よって,

$$(\sin\varphi, \cos\varphi) = \begin{cases} (-\sin\theta, \cos\theta) & (\theta + \varphi = 0,\ 2\pi), \\ (\sin\theta, -\cos\theta) & (\theta + \varphi = \pi,\ 3\pi) \end{cases}$$

だから,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

である．したがって,

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \middle|\ \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

である．

直交行列に関する基本的な事実を幾つか挙げておこう．

定理 5.1　$A,\ B \in \mathrm{O}(n)$ ならば, $AB \in \mathrm{O}(n)$ である．

証明　直交行列の定義より,

$$\begin{aligned} {}^t(AB)(AB) &= {}^tB{}^tAAB \\ &= {}^tBEB \\ &= {}^tBB \\ &= E, \end{aligned}$$

すなわち,

$${}^t(AB)(AB) = E$$

である．よって, $AB \in \mathrm{O}(n)$ である．　□

定理 5.2　直交行列の行列式は 1 または -1 である．

証明　A を直交行列とすると, 直交行列の定義と行列式の性質より,

$$\begin{aligned} 1 &= |E| \\ &= |A{}^tA| \\ &= |A||{}^tA| \\ &= |A|^2, \end{aligned}$$

すなわち, $|A|^2 = 1$ である．よって, $|A| = \pm 1$, すなわち, 直交行列の行列式は 1 または -1 である．　□

行列式が 1 の直交行列を特殊直交行列ともいう．また, 行列式が 1 の n 次直交行列全体の集合を $\mathrm{SO}(n)$ と表す．このとき, 次がなりたつ．

定理 5.3　$A,\ B \in \mathrm{SO}(n)$ ならば, $AB \in \mathrm{SO}(n)$ である．

証明　まず, 定理 5.1 より, $AB \in \mathrm{O}(n)$ である. ここで, 行列式の性質より,

$$\begin{aligned}|AB| &= |A||B| \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1,\end{aligned}$$

すなわち, $|AB| = 1$ である. よって, $AB \in \mathrm{SO}(n)$ である. □

以下では, 線形代数の習慣に従い, 実数を成分とする n 次の列ベクトル全体からなる数ベクトル空間を考え, これを $\mathbf{R}^n$ と表す. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

である. 更に, $\mathbf{R}^n$ の標準内積を考え, これを $\langle\ ,\ \rangle$ と表す. すなわち,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

に対して,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = {}^t x y$$

である. 標準内積を考えた内積空間 $\mathbf{R}^n$ を Euclid 空間ともいう. 更に, 標準内積により定まるノルムを $\|\ \|$ と表す. すなわち,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

である. このとき, 次がなりたつことが分かる.

定理 5.4　A を n 次実行列とすると, 次の (1)〜(4) は互いに同値である.

(1) $A \in \mathrm{O}(n)$ である.
(2) 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ である.
(3) 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\|Ax\| = \|x\|$ である.
(4) A を $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と列ベクトルに分割しておくと, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底となる.

例 5.4　$\mathbf{R}^2$ の正規直交基底はある $\theta \in [0, 2\pi)$ を用いて,

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \right\}$$

と表すことができる. よって, 定理 5.4 を用いることにより, 例 5.3 の結果を導くことができる.

問題 5

1. 行列式が 1, -1 の奇数次の直交行列はそれぞれ 1, -1 を固有値にもつことを示せ.

2. $A \in \mathrm{O}(3)$ とする. このとき, ある $P \in \mathrm{O}(3)$ および $\theta \in [0, 2\pi)$ が存在し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ. なお, 必要ならば P の列の何れかを -1 倍することにより, $P \in \mathrm{SO}(3)$ とすることができる.

3. $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積空間, $\|\ \|$ を V のノルムとし, x, $y \in V$ とする.

(1) 等式

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

がなりたつことを示せ.

(2) 等式

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

がなりたつことを示せ. この事実を中線定理という.

問題 5 の解答

1. $m \in \mathbf{N}$, $A \in \mathrm{O}(2m-1)$, $|A| = \varepsilon$ とする．ただし, $\varepsilon = \pm 1$ である．このとき, 行列式の性質と直交行列の定義より,

$$\begin{aligned} |\varepsilon E - A| &= \varepsilon^2 |\varepsilon E - A| \\ &= \varepsilon |A| |\varepsilon E - A| \\ &= \varepsilon |{}^t A| |\varepsilon E - A| \\ &= \varepsilon |{}^t A(\varepsilon E - A)| \\ &= \varepsilon |\varepsilon {}^t A - E| \\ &= \varepsilon |\varepsilon A - E| \\ &= \varepsilon (-\varepsilon)^{2m-1} |\varepsilon E - A| \\ &= -|\varepsilon E - A|, \end{aligned}$$

すなわち,

$$|\varepsilon E - A| = -|\varepsilon E - A|$$

である．よって, $|\varepsilon E - A| = 0$ となり, A は ε を固有値にもつ．したがって, 行列式が 1, -1 の奇数次の直交行列はそれぞれ 1, -1 を固有値にもつ．

2. $|A| = \varepsilon$ とする．ただし, $\varepsilon = \pm 1$ である．このとき, 問題 5.1 より, 固有値 ε に対する A の固有ベクトルが存在する．すなわち, ある $p_1 \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ が存在し,

$$Ap_1 = \varepsilon p_1$$

となる．ここで, $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{R}^3$ を $\{p_1, p_2, p_3\}$ が $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底となるように選んでおく．$P = (p_1, p_2, p_3)$ とおくと, 定理 5.4 より, $P \in \mathrm{O}(3)$ である．このとき,

$$P^{-1} = {}^t P \in \mathrm{O}(3)$$

である．また, $i = 1, 2, 3$ とすると, 定理 5.4 より,

$$\begin{aligned} {}^t p_1 A p_i &= {}^t(\varepsilon A p_1) A p_i \\ &= \varepsilon \langle A p_1, A p_i \rangle \\ &= \varepsilon \langle p_1, p_i \rangle \\ &= \varepsilon \delta_{1i}, \\ {}^t p_i A p_1 &= {}^t p_i (\varepsilon p_1) \\ &= \varepsilon \langle p_i, p_1 \rangle \\ &= \varepsilon \delta_{i1} \end{aligned}$$

である．ただし, δ_{ij} は Kronecker の δ である．よって,

$$\begin{aligned} P^{-1} A P &= {}^t P A P \\ &= \begin{pmatrix} {}^t p_1 \\ {}^t p_2 \\ {}^t p_3 \end{pmatrix} A (p_1, p_2, p_3) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t p_1 \\ {}^t p_2 \\ {}^t p_3 \end{pmatrix} (Ap_1,\, Ap_2,\, Ap_3)$$
$$= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

すなわち,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

となる. ただし, B は 2 次行列である. ここで, $|P| = \pm 1$, $|A| = \varepsilon$ だから, 定理 5.1 および行列式の性質より, $B \in \mathrm{SO}(2)$ となる. したがって, 例 5.3 より, ある $\theta \in [0, 2\pi)$ が存在し,

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となり, 題意がなりたつ.

3. (1) ノルムの定義および内積の性質より,

$$\begin{aligned} 右辺 &= \frac{1}{2}\langle x+y, x+y\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x\rangle - \frac{1}{2}\langle y, y\rangle \\ &= \frac{1}{2}\{\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle\} - \frac{1}{2}\langle x, x\rangle - \frac{1}{2}\langle y, y\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle x, y\rangle + \frac{1}{2}\langle y, x\rangle \\ &= 左辺 \end{aligned}$$

である. よって, 等式

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \tag{$*$}$$

がなりたつ.

(2) $(*)$ において, y を $-y$ に置き換えると, 内積およびノルムの性質より

$$-\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \tag{$**$}$$

である. $(*) + (**)$ より,

$$0 = \frac{1}{2}\|x+y\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

である. これを整理すると, 中線定理が得られる.