

§6. Euclid 空間の等長変換

初等幾何学では平面上の三角形の合同条件等が扱われるが、一般に、Euclid 空間内の図形が合同であるとは、等長変換というもので写り合うこととして定められる。そして、等長変換で写しても変わらない Euclid 空間内の図形の性質を調べる幾何学は Euclid 幾何学とよばれる。

まず、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

とすると、 x と y を結んで得られる線分の長さは、三平方の定理より、

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|$$

である。そこで、次のように定める。

定義 6.1 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 $d: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

により定める。このとき、 d を \mathbf{R}^n の Euclid 距離、 $d(x, y)$ を x と y の Euclid 距離という。

Euclid 距離を用いて、Euclid 空間の等長変換を次のように定める。

定義 6.2 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^n への写像とする。 f が全単射であり、Euclid 距離を保つ、すなわち、任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して、等式

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \tag{1}$$

がなりたつとき、 f を \mathbf{R}^n の等長変換または合同変換という。

\mathbf{R}^n の等長変換全体の集合を $\text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ と表す。等長変換の定義より、次がなりたつことが分かる。

定理 6.1 $f, g \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ とすると、次の (1), (2) がなりたつ。

(1) $g \circ f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$.

(2) $f^{-1} \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$.

次に述べるように、 \mathbf{R}^n の等長変換は直交行列と列ベクトルを用いて表すことができる。

定理 6.2 $f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ は $A \in O(n)$ および $b \in \mathbf{R}^n$ を用いて、

$$f(x) = Ax + b \quad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{*}$$

と表される。

証明 次の (1)~(4) の順に分けて示す。

(1) まず、(*) のように表される \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^n への写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ は \mathbf{R}^n の等長変換である。

(2) 逆に、 $f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ とする。 e_1, e_2, \dots, e_n を \mathbf{R}^n の基本ベクトル、すなわち、

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし, $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, $a_i \in \mathbf{R}^n$ を

$$a_i = f(e_i) - f(0)$$

により定める. このとき, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は \mathbf{R}^n の正規直交基底である.

(3) (2) および定理 5.4 より, $A \in O(n)$ を $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ により定めることができる. 更に, \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^n への写像 $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を

$$g(x) = Ax + f(0) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めると, (1) より, $g \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ である. このとき, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$\|(g^{-1} \circ f)(x)\| = \|x\|$$

である.

(4) $f = g$ である. 特に, $b = f(0)$ とおくと, f は (*) のように表される.

(1): f が全単射であり, Euclid 距離を保つことを示せばよい. f が Euclid 距離を保つことのみ示す.

$x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると, 定理 5.4 より,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| \\ &= \|(Ax + b) - (Ay + b)\| \\ &= \|A(x - y)\| \\ &= \|x - y\| \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

である. よって, f は Euclid 距離を保つ.

(2): $i, j = 1, 2, \dots, n$ とし, 問題 5.3 (1) において, x, y をそれぞれ $a_i, -a_j$ に置き換えると, 等長変換の定義より,

$$\begin{aligned} -2\langle a_i, a_j \rangle &= \|a_i - a_j\|^2 - \|a_i\|^2 - \|a_j\|^2 \\ &= \|(f(e_i) - f(0)) - (f(e_j) - f(0))\|^2 - \|f(e_i) - f(0)\|^2 - \|f(e_j) - f(0)\|^2 \\ &= \|f(e_i) - f(e_j)\|^2 - \|f(e_i) - f(0)\|^2 - \|f(e_j) - f(0)\|^2 \\ &= d(f(e_i), f(e_j))^2 - d(f(e_i), f(0))^2 - d(f(e_j), f(0))^2 \\ &= d(e_i, e_j)^2 - d(e_i, 0)^2 - d(e_j, 0)^2 \\ &= \|e_i - e_j\|^2 - \|e_i - 0\|^2 - \|e_j - 0\|^2 \\ &= \|e_i - e_j\|^2 - 1 - 1 \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\|e_i - e_j\|^2 = \begin{cases} 0 & (i = j), \\ 2 & (i \neq j) \end{cases}$$

だから, $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$ となる. ただし, δ_{ij} は Kronecker の δ である. よって, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は \mathbf{R}^n の正規直交基底である.

(3): 定理 6.1 より, $g^{-1} \circ f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ である. 更に, $f(0) = g(0)$ だから,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|x - 0\| \\
&= d(x, 0) \\
&= d((g^{-1} \circ f)(x), (g^{-1} \circ f)(0)) \\
&= d((g^{-1} \circ f)(x), 0) \\
&= \|(g^{-1} \circ f)(x)\|,
\end{aligned}$$

すなわち,

$$\|(g^{-1} \circ f)(x)\| = \|x\|$$

である.

(4): (3) において,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (g^{-1} \circ f)(x)$$

とおく. このとき,

$$\|x\| = \|y\| \tag{a}$$

である. また, $i = 1, 2, \dots, n$ のとき,

$$\begin{aligned}
d(x, e_i)^2 &= \|x - e_i\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\langle x, e_i \rangle + \|e_i\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2x_i + 1,
\end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x, e_i)^2 = \|x\|^2 - 2x_i + 1 \tag{b}$$

である. 同様に,

$$d(y, e_i)^2 = \|y\|^2 - 2y_i + 1 \tag{c}$$

である. ここで, $g^{-1} \circ f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ であり,

$$\begin{aligned}
g(e_i) &= Ae_i + f(0) \\
&= a_i + f(e_i) - a_i \\
&= f(e_i),
\end{aligned}$$

すなわち, $f(e_i) = g(e_i)$ だから,

$$\begin{aligned}
d(x, e_i) &= d((g^{-1} \circ f)(x), (g^{-1} \circ f)(e_i)) \\
&= d(y, e_i),
\end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x, e_i) = d(y, e_i) \tag{d}$$

である. よって, (a)~(d) より, 任意の $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, $x_i = y_i$ である. したがって, $x = y$, すなわち, $g^{-1} \circ f = 1_{\mathbf{R}^n}$ となるから, $f = g$ である. \square

問題 6

1. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間, $\| \cdot \|$ を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ により定まるノルムとする. このとき, $V \times V$ で定義された実数値関数 $d: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

により定める.

- (1) 任意の $x, y \in V$ に対して, $d(x, y) \geq 0$ であり, 更に, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限ることを示せ. d のこの性質を正值性という.
- (2) 任意の $x, y \in V$ に対して, $d(x, y) = d(y, x)$ であることを示せ. d のこの性質を対称性という.
- (3) 任意の $x, y, z \in V$ に対して, 不等式

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

がなりたつことを示せ. この不等式を三角不等式という.

2. X を空でない集合とし, $X \times X$ で定義された実数値関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ が次の (a)~(c) をみたすとする.

- (a) 任意の $x, y \in X$ に対して, $d(x, y) \geq 0$ であり, 更に, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限る. (正值性)
- (b) 任意の $x, y \in X$ に対して, $d(x, y) = d(y, x)$ である. (対称性)
- (c) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, 三角不等式

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

がなりたつ.

このとき, d を X の距離, $d(x, y)$ を x と y の距離, 組 (X, d) を距離空間という. 例えば, 問題 6.1 より, 内積空間は距離空間となる. 特に, Euclid 空間は距離空間となる.

- (1) X を空でない集合とし, $X \times X$ で定義された実数値関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

により定める. このとき, 明らかに, d は正值性および対称性をみたす. d は三角不等式をみたすことを示せ. 特に, d は X の距離となる. d を離散距離, (X, d) を離散距離空間または離散空間という.

- (2) $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への写像とする. 任意の $x, y \in X$ に対して, 等式

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

がなりたつとき, f を等長写像という.

等長写像は単射であることを示せ. 特に, 定義 6.2 の \mathbf{R}^n の等長変換の定義において, f の単射性の仮定は不要であることが分かる.

- (3) (X, d) を距離空間とする. X 上の恒等写像 1_X は X から X への等長写像であることを示せ.

問題 6 の解答

1. (1) ノルムの正値性より, $\|x - y\| \geq 0$ であり, 更に, $\|x - y\| = 0$ となるのは $x - y = 0$ のときに限る. すなわち, d の定義より, $d(x, y) \geq 0$ であり, 更に, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限る.
- (2) ノルムの性質より,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|(-1)(y - x)\| \\ &= |-1| \|y - x\| \\ &= 1 \cdot d(y, x) \\ &= d(y, x), \end{aligned}$$

すなわち, $d(x, y) = d(y, x)$ である.

- (3) ノルムに関する三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| \\ &= \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x, y) + d(y, z), \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

である.

2. (1) $x, y, z \in X$ とする.
 $x = z$ のとき, d の定義より,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= 0 \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

である.

$x \neq z$ のとき, $x \neq y$ または $y \neq z$ だから, d の定義より, $d(x, y) = 1$ または $d(y, z) = 1$ である. よって, d の定義より,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= 1 \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

である.

したがって, d は三角不等式をみたす.

- (2) $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への等長写像とする. $x, y \in X$, $f(x) = f(y)$ とすると, d_Y の正値性および等長写像の定義より,

$$\begin{aligned} 0 &= d_Y(f(x), f(y)) \\ &= d_X(x, y), \end{aligned}$$

すなわち, $d_X(x, y) = 0$ である. よって, d_X の正值性より, $x = y$ である. したがって, f は単射, すなわち, 等長写像は単射である.

(3) $x, y \in X$ とすると, 恒等写像の定義より, $1_X(x) = x, 1_X(y) = y$ である. よって,

$$d(1_X(x), 1_X(y)) = d(x, y)$$

となるから, 1_X は等長写像である.