§7. 回転と鏡映

定理 6.2 では, $f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ が $A \in \mathrm{O}(n)$ および $b \in \mathbf{R}^n$ を用いて,

$$f(x) = Ax + b \quad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{1}$$

と表されることを述べた. ここでは, 上の A および b の幾何学的な意味について考えていこう.

まず, $A = E$ とする. このとき, (1) は

$$f(x) = x + b \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

となる. よって, f は x を $x + b$ へ写す平行移動を表す.

次に, $b = 0$ とする. このとき, (1) は

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{2}$$

となる.

例 7.1 (2) において, $n = 1$ とする. このとき, $A \in \mathrm{O}(1)$ だから, 例 5.2 より,

$$A = \begin{cases} 1 & (|A| = 1), \\ -1 & (|A| = -1) \end{cases}$$

である.

よって, $A \in \mathrm{O}(1)$, $|A| = 1$, すなわち, $A \in \mathrm{SO}(1)$ のとき, (2) により表される f は恒等写像 $1_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ である. また, $A \in \mathrm{O}(1)$, $|A| = -1$ のとき, (2) により表される f は原点に関する対称移動である.

例 7.2 (2) において, $n = 2$ とする. このとき, $A \in \mathrm{O}(2)$ だから, 例 5.3 より, ある $\theta \in [0, 2\pi)$ が存在し,

$$A = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & (|A| = 1), \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} & (|A| = -1) \end{cases}$$

となる.

一方, $\theta \in [0, 2\pi)$ に対して, 原点を中心とする角 θ の回転により得られる $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像を f とすると, $f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^2)$ である. このとき, $f(0) = 0$ だから, f は (2) のように表される. ここで, e_1, e_2 を $\mathbf{R}^2$ の基本ベクトルとすると,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

である. よって,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である. したがって, $A \in \mathrm{O}(2)$, $|A| = 1$, すなわち, $A \in \mathrm{SO}(2)$ のとき, (2) により表される f は原点を中心とする回転を意味する.

また, $\theta \in [0, 2\pi)$ に対して, 原点を通る直線

$$x_2 \cos\frac{\theta}{2} = x_1 \sin\frac{\theta}{2}$$

に関する対称移動により得られる $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像を f とすると, $f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^2)$ である．このとき, $f(0) = 0$ だから, f は (2) のように表される．ここで, e_1, e_2 を $\mathbf{R}^2$ の基本ベクトルとすると,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

である．よって,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

である．したがって, $A \in \mathrm{O}(2)$, $|A| = -1$ のとき, (2) により表される f は原点を通る直線に関する対称移動を意味する.

例 7.3 (2) において, $n = 3$ とする．このとき, $A \in \mathrm{O}(3)$ だから, 問題 5.2 より, ある $P \in \mathrm{O}(3)$ および $\theta \in [0, 2\pi)$ が存在し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる．よって, P を $P = (p_1, p_2, p_3)$ と列ベクトルに分割しておくと, 定理 5.4 より, $\{p_1, p_2, p_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底であり,

$$Ap_1 = \begin{cases} p_1 & (|A| = 1), \\ -p_1 & (|A| = -1), \end{cases} \qquad A(p_2, p_3) = (p_2, p_3)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．したがって, 例 7.2 より, $A \in \mathrm{O}(3)$, $|A| = 1$, すなわち, $A \in \mathrm{SO}(3)$ のとき, (2) により表される f は原点を通る p_1 方向の直線を回転軸とする角 θ の回転を表す．また, $A \in \mathrm{O}(3)$, $|A| = -1$ のとき, (2) により表される f は p_2 と p_3 により生成される平面に関する対称移動と原点を通る p_1 方向の直線を回転軸とする角 θ の回転の合成を表す.

ここまでは, 数を実数として考えてきたが, 数を複素数の範囲まで拡げると, 一般の次数の直交行列に対しては, 次がなりたつことが分かる.

定理 7.1 $A \in \mathrm{O}(n)$ とすると, ある $P \in \mathrm{O}(n)$ が存在し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_k & & & & \text{\huge 0} \\ & -E_l & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & R_{\theta_m} \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる．ただし, k 次の単位行列を E_k と表し, $\theta \in \mathbf{R}$ に対して,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおいた．なお, 必要ならば P の列の何れかを -1 倍することにより, $P \in \mathrm{SO}(n)$ とすることができる．また, E_k, $-E_l$, R_{θ_1}, $\dots$, R_{θ_m} の部分の幾つかは現れないこともある．

(3) の右辺を直交行列の標準形という．直交行列の標準形を用いることにより, 一般の $n \in \mathbf{N}$ に対しても, (2) により表される f の意味を理解することができる．まず, $A \in \mathrm{O}(n)$ とする．

$|A| = 1$, すなわち, $A \in \mathrm{SO}(n)$ のとき, 行列式の性質より, (3) において, l は偶数となる．ここで,

$$-E_2 = R_\pi$$

であることに注意し, 例 7.3 のように考えると, (2) により表される f は原点を中心とする回転の幾つかの合成を意味することが分かる．このことから, $\mathrm{SO}(n)$ の元を回転行列ともいう．

$|A| = -1$ のとき, (3) を用いて, 例 7.3 のように考えると, (2) により表される f は原点を通る超平面に関する対称移動と原点を中心とする回転の幾つかの合成を意味することが分かる．

一般に, Euclid 空間内の超平面に関する対称移動を鏡映ともいう．超平面の式を与えたとき, 鏡映がどのように表されるのかを計算してみよう．まず, $a \in \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ とし, a を通り, p を法ベクトルとする超平面を Π とおく．このとき, Π は方程式

$$\langle p, x - a \rangle = 0$$

で表される．ここで, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を Π に関する鏡映とし, $x' \in \mathbf{R}^n$ とする．このとき, 鏡映の定義より, 次の (a), (b) がなりたつ．

(a) $f(x') - x'$ は p と平行である．
(b) x' と $f(x')$ の中点は Π 上にある．

(a) より, ある $c \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$f(x') - x' = cp,$$

すなわち,

$$f(x') = x' + cp \tag{4}$$

となる．また, Π の方程式と (b) より,

$$\left\langle p, \frac{x' + f(x')}{2} - a \right\rangle = 0 \tag{5}$$

である．よって, (4) を (5) に代入すると,

$$\left\langle p, \frac{x' + x' + cp}{2} - a \right\rangle = 0$$

であり, これを解くと,

$$c = -\frac{2\langle p, x' - a \rangle}{\langle p, p \rangle}$$

である．これを (4) に代入し, x' を改めて x とおくと,

$$f(x) = x - \frac{2\langle p, x - a \rangle}{\langle p, p \rangle} p \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

が得られる．

問題 7

1. $\theta \in \mathbf{R}$ とする．等式

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

がなりたつことを示せ.

2. $\theta, \varphi \in \mathbf{R}$ とする．等式

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\varphi) & -\sin(\theta-\varphi) \\ \sin(\theta-\varphi) & \cos(\theta-\varphi) \end{pmatrix}$$

がなりたつことを示せ．特に, 平面の原点を中心とする回転は原点を通る直線に関する 2 つの鏡映の合成として表されることが分かる．更に, 直交行列の標準形より, 原点を原点へ写す $\mathbf{R}^n$ の等長変換は原点を通る超平面に関する高々n 個の鏡映の合成として表されることが分かる.

3. $f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ とする．$f(0) \neq 0$ ならば, ある鏡映 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が存在し, $(g \circ f)(0) = 0$ となることを示せ．特に, 問題 7.2 より, $\mathbf{R}^n$ の等長変換は高々$(n+1)$ 個の鏡映の合成として表されることが分かる.

4. $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積空間, W を V の部分空間とする．このとき, $W^\perp \subset V$ を

$$W^\perp = \{x \in V \mid \text{任意の } y \in W \text{ に対して}, \langle x, y \rangle = 0\}$$

により定める.

(1) $W^\perp$ は V の部分空間であることを示せ．$W^\perp$ を W の直交補空間という.

(2) $W \cap W^\perp = \{0\}$ がなりたつことを示せ.

(3) $\mathbf{R}^3$ の部分空間 W を

$$W = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle|\ c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

により定める．$\mathbf{R}^3$ の標準内積を考えるとき, $W^\perp$ を求めよ.

問題 7 の解答

1. 加法定理より,

$$
\begin{aligned}
&\text{左辺}\\
&= \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}+\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} & -\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right) & -\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & -\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}\\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

である. よって, 題意の等式がなりたつ.

2. 加法定理より,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}\\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

である. よって, 題意の等式がなりたつ.

3. $\frac{1}{2}f(0)$ を通り, $f(0)$ を法ベクトルとする超平面に関する鏡映を g とする. このとき, 鏡映の定義より, $(g\circ f)(0)=0$ である.

4. (1) $y\in W$ を任意に選んでおく.

まず, 内積の性質より,

$$\langle 0, y\rangle = 0$$

である. ここで, y は任意だから, $0\in W^\perp$ である.

次に, x_1, $x_2\in W^\perp$ とすると, 内積の線形性より,

$$
\begin{aligned}
\langle x_1+x_2, y\rangle &= \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle\\
&= 0+0\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$\langle x_1+x_2, y\rangle = 0$$

である. ここで, y は任意だから, $x_1+x_2\in W^\perp$ である.

更に, $c\in\mathbf{R}$, $x\in W^\perp$ とすると, 内積の線形性より,

$$
\begin{aligned}
\langle cx, y\rangle &= c\langle x, y\rangle\\
&= c\cdot 0\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$\langle cx, y \rangle = 0$$

である. ここで, y は任意だから, $cx \in W^\perp$ である.

よって, $W^\perp$ は V の部分空間である.

(2) $x \in W \cap W^\perp$ とすると, $x \in W$ かつ $x \in W^\perp$ だから,

$$\langle x, x \rangle = 0$$

である. よって, 内積の正値性より, $x = 0$ である. したがって,

$$W \cap W^\perp = \{0\}$$

である.

(3) $x \in W^\perp$, $y \in W$ とすると,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbf{R}), \quad y = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1,\, c_2 \in \mathbf{R})$$

と表される. このとき, 標準内積の定義より,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, y \rangle \\ &= c_1 \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + c_2 \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= c_1(x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot (-1)) + c_2(x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot (-1)) \\ &= c_1(x_1 - x_3) + c_2(x_2 - x_3), \end{aligned}$$

すなわち,

$$c_1(x_1 - x_3) + c_2(x_2 - x_3) = 0$$

である. ここで, c_1, c_2 は任意だから,

$$x_1 - x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0$$

である. よって, $c \in \mathbf{R}$ を任意の定数とすると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される. したがって,

$$W^\perp = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbf{R} \right\}$$

である.