

§12. 2次超曲面の標準形

ここでは、2次超曲面

$${}^t xAx + 2{}^t bx + c = 0 \quad (1)$$

を \mathbf{R}^n の等長変換を用いて、標準形という理解しやすい形に変形することを考えよう。ただし、 $A \in \text{Sym}(n)$, $A \neq O$, $b, x \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ である。なお、 A が正則な場合は問題 11.1 も参考にする
とよい。

まず、定理 11.1 の証明を思い出そう。 $f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ に対して、 $P \in O(n)$ および $q \in \mathbf{R}^n$ を用いて、 f^{-1} を

$$f^{-1}(y) = Py + q \quad (y \in \mathbf{R}^n)$$

と表しておく。このとき、 $x = f^{-1}(y)$ を (1) に代入すると、2次超曲面

$${}^t y({}^t PAP)y + 2{}^t (Aq + b)Py + {}^t qAq + 2{}^t bq + c = 0 \quad (2)$$

が得られるのであった。ここで、 $A \in \text{Sym}(n)$ だから、 A の固有方程式の解はすべて実数であり、 A の固有値である。また、 $r = \text{rank } A$ とおくと、 $A \neq O$ だから、 $r = 1, 2, \dots, n$ である。特に、 $r = n$ となるのは A が正則なときである。そこで、 A の固有値を重複度も込めて、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする。ただし、

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \neq 0, \quad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0 \quad (3)$$

である。次は、(2) の左辺の第 2 項が 0 になるかどうかで場合分けを行おう。

定義 12.1 2次超曲面 (1) を考える。ある $q \in \mathbf{R}^n$ が存在し、

$$Aq + b = 0 \quad (4)$$

となるとき、(1) は有心であるという。(1) は有心でないとき、無心であるという。

(1) が有心な場合、(4) がなりたつように $q \in \mathbf{R}^n$ を選んでおくと、(2) は

$${}^t y({}^t PAP)y + {}^t qAq + 2{}^t bq + c = 0 \quad (5)$$

となる。よって、 $y \in \mathbf{R}^n$ が (5) の解ならば、 $-y$ も (5) の解である。すなわち、(5) が表す \mathbf{R}^n の部分集合は原点に関して対称である。したがって、(1) が表す \mathbf{R}^n の部分集合は点 q に関して対称である。これが「有心」という言葉の意味である。特に、 A が正則なとき、問題 11.1 で扱ったように、 $q = -A^{-1}b$ とおくと、(4) がなりたつから、(1) は有心である。

例 12.1 例 11.1, 例 11.2 で述べた楕円, 双曲線は有心である。

一方、例 11.3 で述べた放物線は無心である。

例 12.2 (楕円面) $a, b, c > 0$ とする。このとき、2次曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

は有心である。これを楕円面という。

例 12.3 (一葉双曲面) $a, b, c > 0$ とする。このとき、2次曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

は有心である。これを一葉双曲面という。

例 12.4 (二葉双曲面) $a, b, c > 0$ とする. このとき, 2次曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

は有心である. これを二葉双曲面という.

例 12.5 (楕円放物面) $a, b > 0$ とする. このとき, 2次曲面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

は無心である. これを楕円放物面という.

例 12.6 (双曲放物面) $a, b > 0$ とする. このとき, 2次曲面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

は無心である. これを双曲放物面という.

さて, (1) を有心2次超曲面とする. このとき, 上で述べたように, (1) は (5) に変形することができる. ここで, 対称行列は直交行列によって対角化可能だから, P を

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

となるように選んでおくことができる. このとき, (3) より, (5) は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + d = 0 \quad (7)$$

となる. ただし, y_1, y_2, \dots, y_n は y の成分, すなわち, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ であり,

$$d = {}^tqAq + 2{}^tbq + c \quad (8)$$

である. (7) を有心2次超曲面の標準形という.

次に, (1) を無心2次超曲面とする. まず, $r = n$, すなわち, A が正則であると仮定すると, (1) は有心となり矛盾である. よって, $r < n$ である.

ここで, 有心な場合と同様に, P を (6) がなりたつように選んでおくと, (2) は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 2(b'_1 y_1 + b'_2 y_2 + \cdots + b'_n y_n) + d = 0,$$

すなわち,

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1} \right)^2 + \cdots + \lambda_r \left(y_r + \frac{b'_r}{\lambda_r} \right)^2 + 2(b'_{r+1} y_{r+1} + \cdots + b'_n y_n) + d' = 0 \quad (9)$$

となる. ただし, y_1, y_2, \dots, y_n は y の成分であり, d は (8) により定め,

$$(b'_1, b'_2, \dots, b'_n) = {}^t(Aq + b)P, \quad d' = d - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b'_2)^2}{\lambda_2} - \cdots - \frac{(b'_r)^2}{\lambda_r}$$

である. よって, $z \in \mathbf{R}^n$ の成分を z_1, z_2, \dots, z_n とし,

$$z = g_1(y), \quad z_i = y_i + \frac{b'_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad z_i = y_i \quad (i = r+1, r+2, \dots, n)$$

とおくと, g_1 は \mathbf{R}^n の等長変換を定め, (9) は

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + 2(b'_{r+1} z_{r+1} + b'_{r+2} z_{r+2} + \dots + b'_n z_n) + d' = 0 \quad (10)$$

となる.

ここで, 仮定より, (1) は無心だから, $b'_{r+1}, b'_{r+2}, \dots, b'_n$ の内の少なくとも1つは0ではない. よって,

$$p = \sqrt{(b'_{r+1})^2 + (b'_{r+2})^2 + \dots + (b'_n)^2}$$

とおくと, $p > 0$ である. このとき, 例 10.5 より, ある $P' \in O(n-r)$ が存在し,

$$P' \begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ b'_{r+2} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

すなわち,

$$(b'_{r+1}, b'_{r+2}, \dots, b'_n) = (p, 0, \dots, 0)P' \quad (11)$$

となる. また,

$$P'' = \begin{pmatrix} E & O \\ O & P' \end{pmatrix}$$

とおくと, $P'' \in O(n)$ である. 更に,

$$u = g_2(z) = P''z$$

とおくと, g_2 は \mathbf{R}^n の等長変換を定め, $u \in \mathbf{R}^n$ の成分を u_1, u_2, \dots, u_n とすると, (11) より, (10) は

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_r u_r^2 + 2pu_{r+1} + d' = 0 \quad (12)$$

となる.

最後に, $v \in \mathbf{R}^n$ の成分を v_1, v_2, \dots, v_n とし,

$$v = g_3(u), \quad v_i = u_i \quad (i \neq r+1), \quad v_{r+1} = u_{r+1} + \frac{d'}{2p}$$

とおくと, g_3 は \mathbf{R}^n の等長変換を定め, (12) は

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \dots + \lambda_r v_r^2 + 2pv_{r+1} = 0 \quad (12)$$

となる. (12) を無心2次超曲面の標準形という.

注意 12.1 上の式変形において, 等長変換を表すときに用いる直交行列の行列式は, 必要ならば列の何れかを -1 倍することにより, すべて1とすることができる. よって, 2次超曲面は鏡映を用いずに, 回転と平行移動の合成のみで標準形に写すことができる.

問題 12

1. $A \in \text{Sym}(n)$, $A \neq O$, $b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とする.

(1) $P \in \text{GL}(n, \mathbf{R})$, $q \in \mathbf{R}^n$ とすると, 等式

$$\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ {}^tq & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tPAP & {}^tP(Aq+b) \\ {}^t(Aq+b)P & {}^tqAq + 2{}^tbq + c \end{pmatrix}$$

がなりたつことを示せ. 特に,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} {}^tPAP & {}^tP(Aq+b) \\ {}^t(Aq+b)P & {}^tqAq + 2{}^tbq + c \end{pmatrix}$$

であることが分かる.

(2) 2次超曲面

$${}^txAx + 2{}^tbx + c = 0 \tag{*}$$

に対して,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, (1) より, $\text{rank } \tilde{A}$ の値は 2次超曲面を \mathbf{R}^n の等長変換で写しても変わらない. 特に, $\text{rank } \tilde{A} = n + 1$ のとき, (*) は固有であるという.

固有な有心 2次超曲面の標準形を求めよ.

(3) 固有な無心 2次超曲面の標準形を求めよ.

(4) 固有 2次曲線は空集合, 楕円, 双曲線, 放物線の何れかであることを示せ. なお, 固有でない 2次曲線は有心であり, 空集合, 1点, 交わる 2直線, 平行な 2直線, 重なった 2直線の何れかであることが分かる.

(5) 固有 2次曲面は空集合, 楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 双曲放物面の何れかであることを示せ.

問題 12 の解答

1. (1) ${}^tA = A$ であることと 1 次行列は転置を取っても変わらないことに注意すると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ {}^tq & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AP & Aq + b \\ {}^tbP & {}^tbq + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tPAP & {}^tP(Aq + b) \\ {}^tqAP + {}^tbP & {}^tq(Aq + b) + {}^tbq + c \end{pmatrix} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

である. よって, 題意の等式がなりたつ.

(2) (*) は始めから標準形であるとしてよい.

(*) が標準形であり, 有心な場合, (*) は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + d = 0$$

と表される. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbf{R}$ である. このとき,

$$\begin{aligned} \text{rank } \tilde{A} &= \text{rank} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \lambda_r & & 0 \\ & & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} r + 1 & (d \neq 0), \\ r & (d = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

である. よって, $\text{rank } \tilde{A} = n + 1$ となるのは $r = n$, $d \neq 0$ のときである. したがって, 求める標準形は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 + d = 0$$

である. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である.

(3) (*) は始めから標準形であるとしてよい.

(*) が標準形であり, 無心な場合, (*) は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2px_{r+1} = 0$$

と表される. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $p > 0$ である. このとき,

$$\begin{aligned} \text{rank } \tilde{A} &= \text{rank} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \lambda_r & & 0 \\ & & 0 & & p \\ & & 0 & & 0 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= r + 2 \end{aligned}$$

である. よって, $\text{rank } \tilde{A} = n + 1$ となるのは $r = n - 1$ のときである. したがって, 求める標準形は

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2 + 2px_n = 0$$

である. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, p > 0$ である.

(4) 標準形について考えればよい.

まず, (2) より, 固有な有心2次曲線の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + d = 0 \quad (\text{a})$$

と表される. ただし, $\lambda, \mu, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である.

λ, μ, d の符号がすべて同じとき, (a) をみたす $x, y \in \mathbf{R}$ は存在しない. すなわち, (a) は空集合を表す.

λ, μ の符号が同じであり, d の符号が λ, μ の符号と異なるとき, (a) は楕円を表す.

λ, μ の符号が異なるとき, (a) は双曲線を表す.

また, (3) より, 固有な無心2次曲線の標準形は

$$\lambda x^2 + 2py = 0$$

と表される. ただし, $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, p > 0$ である. これは放物線を表す.

よって, 固有2次曲線は空集合, 楕円, 双曲線, 放物線の何れかである.

(5) 標準形について考えればよい.

まず, (2) より, 固有な有心2次曲面の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + d = 0 \quad (\text{b})$$

と表される. ただし, $\lambda, \mu, \nu, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である.

λ, μ, ν, d の符号がすべて同じとき, (b) をみたす $x, y, z \in \mathbf{R}$ は存在しない. すなわち, (b) は空集合を表す.

λ, μ, ν の符号がすべて同じであり, d の符号が λ, μ, ν の符号と異なるとき, (b) は楕円面を表す.

λ, μ, ν の符号の内の2つが d の符号と同じであり, 残りの1つの符号が異なるとき, (b) は二葉双曲面を表す.

λ, μ, ν の符号の内の2つが d および残りの1つと符号が異なるとき, (b) は一葉双曲面を表す.

また, (3) より, 固有な無心2次曲面の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + 2pz = 0 \quad (\text{c})$$

と表される. ただし, $\lambda, \mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, p > 0$ である.

λ, μ の符号が同じとき, (c) は楕円放物面を表す.

λ, μ の符号が異なるとき, (c) は双曲放物面を表す.

よって, 固有2次曲面は空集合, 楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 双曲放物面の何れかである.