

## §2. ノルム空間

ノルム空間は距離空間の例となる. ここでは,  $\mathbf{R}$  を実数全体の集合とし,  $\mathbf{R}$  上のベクトル空間を考え, 次のように定めよう.

**定義 2.1**  $V$  を  $\mathbf{R}$  上のベクトル空間とする. 関数  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbf{R}$  が任意の  $x, y \in V$  に対して, 次の (1)~(3) をみたすとき,  $\| \cdot \|$  を  $V$  のノルム,  $\|x\|$  を  $x$  のノルムという. また, 組  $(V, \| \cdot \|)$  または単に  $V$  をノルム空間という.

- (1) 任意の  $x \in V$  に対して,  $\|x\| \geq 0$  であり,  $\|x\| = 0$  となるのは  $x = 0$  のときに限る. (正值性)
- (2) 任意の  $c \in \mathbf{R}$  および任意の  $x \in V$  に対して,  $\|cx\| = |c|\|x\|$ .
- (3) 任意の  $x, y \in V$  に対して,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . (三角不等式)

**例 2.1 (内積空間)**  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を内積空間とし, 関数  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in V)$$

により定める. このとき,  $\| \cdot \|$  は  $V$  のノルムとなる. すなわち,  $(V, \| \cdot \|)$  はノルム空間である.

**注意 2.1** 内積空間  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  から定められるノルム  $\| \cdot \|$  に関して, 中線定理

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (x, y \in V)$$

がなりたつ.

逆に,  $(V, \| \cdot \|)$  を中線定理がなりたつノルム空間とする. このとき, 関数  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (x, y \in V)$$

により定めると,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $V$  の内積となり, 更に,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  から定められるノルムは  $\| \cdot \|$  であることが分かる.

**例 2.2** 有界閉区間  $[0, 1]$  で定義された実数値連続関数全体の集合を  $C[0, 1]$  と表すことにする.  $f, g \in C[0, 1]$  とすると,  $f$  と  $g$  の和  $f + g \in C[0, 1]$  を

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad (t \in [0, 1])$$

により定めることができる. 更に,  $c \in \mathbf{R}$  とすると,  $f$  の  $c$  によるスカラー倍  $cf \in C[0, 1]$  を

$$(cf)(t) = cf(t) \quad (t \in [0, 1])$$

により定めることができる. このとき,  $C[0, 1]$  は  $\mathbf{R}$  上のベクトル空間となる.

ここで, 関数  $\| \cdot \| : C[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\|f\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \quad (f \in C[0, 1])$$

により定めることができる. このとき,  $\| \cdot \|$  は  $C[0, 1]$  のノルムとなることが分かる. すなわち,  $(C[0, 1], \| \cdot \|)$  はノルム空間である.

次の定理より, ノルム空間は距離空間となる.

**定理 2.1**  $(V, \| \cdot \|)$  をノルム空間とし, 関数  $d : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

により定める. このとき,  $d$  は  $V$  の距離となる. すなわち,  $(V, d)$  は距離空間である.

**証明** 次の (1)~(3) がなりたつことを示せばよい.

- (1) 任意の  $x, y \in V$  に対して,  $d(x, y) \geq 0$  であり,  $d(x, y) = 0$  となるのは  $x = y$  のときに限る.
- (2) 任意の  $x, y \in V$  に対して,  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- (3) 任意の  $x, y, z \in V$  に対して,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

(1): ノルムの正值性より,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

である. また,  $d(x, y) = 0$  となるのは

$$\|x - y\| = 0$$

となるとき, すなわち,  $x - y = 0$  より,  $x = y$  のときに限る.

(2): 定義 2.1 の (2) より,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|(-1)(y - x)\| \\ &= |-1| \|y - x\| \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

である. すなわち, (2) がなりたつ.

(3): ノルムに対する三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| \\ &= \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

である. すなわち, (3) がなりたつ. □

以下, ノルム空間に対しては, 定理 2.1 の距離から定められる位相を考える. 例えば, ノルム空間  $(V, \|\cdot\|)$  の点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $x \in V$  に収束するとは,

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

がなりたつことである. このとき, 直積距離空間  $V \times V$  を考えることができる. また,  $\mathbf{R}$  の Euclid 距離を考えると, 直積距離空間  $\mathbf{R} \times V$  を考えることができる. 更に, 次がなりたつ.

**定理 2.2**  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間とすると, 次の (1)~(3) がなりたつ.

- (1) 和が定める写像  $V \times V \rightarrow V$  は連続である.
- (2) スカラー倍が定める写像  $\mathbf{R} \times V \rightarrow V$  は連続である.
- (3) 関数  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbf{R}$  は連続である.

**証明** (1):  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $x \in V$  に収束する  $V$  の点列とする. また,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $y \in V$  に収束する  $V$  の点列とする. ノルムに対する三角不等式より,  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \\ &\rightarrow 0 + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

すなわち,

$$x_n + y_n \rightarrow x + y \quad (n \rightarrow \infty)$$

である. よって, (1) がなりたつ.

(2):  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $c \in \mathbf{R}$  に収束する  $\mathbf{R}$  の点列とする. また,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $x \in V$  に収束する  $V$  の点列とする. ノルムの性質より,  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\begin{aligned} \|c_n x_n - cx\| &= \|(c_n - c)(x_n - x) + (c_n - c)x + c(x_n - x)\| \\ &\leq \|(c_n - c)(x_n - x)\| + \|(c_n - c)x\| + \|c(x_n - x)\| \\ &= |c_n - c| \|x_n - x\| + |c_n - c| \|x\| + |c| \|x_n - x\| \\ &\rightarrow 0 \cdot 0 + 0 \cdot \|x\| + |c| \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

すなわち,

$$c_n x_n \rightarrow cx \quad (n \rightarrow \infty)$$

である. よって, (2) がなりたつ.

(3):  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $x \in V$  に収束する  $V$  の点列とする. まず, ノルムに対する三角不等式より,

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \|x + (x_n - x)\| \\ &\leq \|x\| + \|x_n - x\|, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$

である. 同様に,

$$\|x\| - \|x_n\| \leq \|x_n - x\|$$

である. よって,  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\begin{aligned} \|\|x_n\| - \|x\|\| &\leq \|x_n - x\| \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\|x_n\| \rightarrow \|x\| \quad (n \rightarrow \infty)$$

である. したがって, (3) がなりたつ. □

## 問題 2

1.  $p \geq 1$  とする.

(1)  $a, b \in \mathbf{R}$  とすると, 不等式

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

がなりたつことを示せ.

(2) 集合  $l^p$  を

$$l^p = \left\{ \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty \text{ となる実数列} \right\}$$

により定め,  $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}, y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$  とする. 実数列  $x + y$  を

$$x + y = \{\xi_n + \eta_n\}_{n=1}^{\infty}$$

により定めると,  $x + y \in l^p$  であることを示せ.

更に,  $c \in \mathbf{R}$  とし, 実数列  $cx$  を

$$cx = \{c\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$$

により定めると,  $cx \in l^p$  となり,  $l^p$  は  $\mathbf{R}$  上のベクトル空間となることが分かる.  $l^p$  を数列空間という.

(3)  $p > 1$  とし,  $q > 1$  を

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (*)$$

により定める.  $a, b > 0$  とすると, 不等式

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

がなりたつことを示せ.

(4)  $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$  に対して,

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおく.

$p > 1$  とし,  $q > 1$  を (\*) により定める.  $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p, y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^q$  とすると, 不等式

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

がなりたつことを示せ. この不等式を Hölder の不等式という.

(5)  $\|\cdot\|_p$  は三角不等式をみたすこと示せ. この三角不等式を Minkowski の不等式という.

更に,  $\|\cdot\|_p$  は  $l^p$  のノルムとなることが分かる. すなわち,  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  はノルム空間である.

## 問題2の解答

1. (1)  $t \geq 0$  のとき, 関数  $t^p$  は下に凸である. よって,

$$\left(\frac{|a| + |b|}{2}\right)^p \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2},$$

すなわち,

$$(|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

である. したがって, 絶対値に対する三角不等式と合わせると, あたえられた不等式がなりたつ.

(2)  $x, y \in l^p$  および (1) より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{p-1}(|\xi_n|^p + |\eta_n|^p) \\ &= 2^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p + 2^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \\ &< +\infty \end{aligned}$$

である. よって,  $x + y \in l^p$  である.

(3)  $t > 0$  のとき, 関数  $\log t$  は上に凸である. よって,

$$\frac{\frac{1}{p} \log a + \frac{1}{q} \log b}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \leq \log \frac{\frac{a}{p} + \frac{b}{q}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}},$$

すなわち,

$$\log a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \log \left( \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right)$$

である. よって, あたえられた不等式がなりたつ.

(4) まず,  $x = 0$ , すなわち, 任意の  $n \in \mathbf{N}$  に対して,  $\xi_n = 0$  のとき, Hölder の不等式がなりたつ. ただし,  $\mathbf{N}$  は自然数全体の集合である. 同様に,  $y = 0$  のとき, Hölder の不等式がなりたつ.

次に,  $x \neq 0$  かつ  $y \neq 0$  とする. このとき,  $\|x\|_p > 0$ ,  $\|y\|_q > 0$  であることに注意し,  $n \in \mathbf{N}$  に対して,

$$a_n = \frac{|\xi_n|^p}{\|x\|_p^p}, \quad b_n = \frac{|\eta_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

とおく. (3) より,

$$\frac{|\xi_n|}{\|x\|_p} \frac{|\eta_n|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|\xi_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|\eta_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

である.  $m \in \mathbf{N}$  とすると, 絶対値に対する三角不等式より,

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \left| \sum_{n=1}^m \xi_n \eta_n \right| \leq \frac{1}{p \|x\|_p^p} \sum_{n=1}^m |\xi_n|^p + \frac{1}{q \|y\|_q^q} \sum_{n=1}^m |\eta_n|^q$$

である. よって,  $m \rightarrow \infty$  とすると,

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \right| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$= 1$$

となり, Hölder の不等式がなりたつ.

(5)  $p = 1$  のとき, 絶対値に対する三角不等式より, Minkowski の不等式がなりたつ.

$p > 1$  のとき,  $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$  とする.  $x + y = 0$  のとき, Minkowski の不等式がなりたつ.  $x + y \neq 0$  のとき,  $q > 1$  を (\*) により定めると, 絶対値に対する三角不等式および Hölder の不等式より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^{p-1} |\xi_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^{p-1} |\eta_n| \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \end{aligned}$$

である. ここで,  $x + y \neq 0$  より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p > 0$$

である. よって, Minkowski の不等式がなりたつ.