§7. 代数的構造

ここでは, 実数値連続関数全体の集合の代数的構造について述べていこう. X を位相空間とし, $f,\ g \in C(X)$, $c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, 定理 4.1, 問題 4-1 で述べたように, $f+g,\ cf,\ fg \in C(X)$ が定められるのであった. このような和, スカラー倍, 積といった演算に注目し, 次のように定める.

定義 7.1　A を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とし, $x,\ y \in A$ に対して, 積 $xy \in A$ を対応させる写像 $A \times A \to A$ があたえられているとする. 次の (1)〜(3) がなりたつとき, A を $\mathbf{R}$ 上の多元環という.

(1) 任意の $x,\ y,\ z \in A$ に対して, $(x+y)z = xz + yz$, $x(y+z) = xy + xz$. (分配律)

(2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $x,\ y \in A$ に対して, $(cx)y = c(xy) = x(cy)$.

(3) 任意の $x,\ y,\ z \in A$ に対して, $(xy)z = x(yz)$. (結合律)

例 7.1　X を位相空間とすると, $C(X)$ は $\mathbf{R}$ 上の多元環である.

例 7.2　まず, $\mathbf{R}^2$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間である. ここで, $(a,b),\ (c,d) \in \mathbf{R}^2$ に対して, $(a,b)(c,d) \in \mathbf{R}^2$ を

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

により定める. このとき, $\mathbf{R}^2$ は $\mathbf{R}$ 上の多元環となることが分かる. この多元環は複素数全体の集合に通常の和, スカラー倍および積を考えたものに他ならない.

更に, 多元環の構造をもつような多元環の部分集合を考え, 次のように定める.

定義 7.2　A を $\mathbf{R}$ 上の多元環とし, B を A の部分集合とする. 次の (1), (2) がなりたつとき, B を A の部分多元環という.

(1) B はベクトル空間としての A の部分空間である.

(2) 任意の $x,\ y \in B$ に対して, $xy \in B$.

注意 7.1　定義 7.2 において, 部分多元環は $\mathbf{R}$ 上の多元環となる. また, ベクトル空間の部分空間の性質より, B が A の部分多元環であるとは, B が空ではなく, 任意の $x,\ y \in B$ および任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して, $x+y,\ cx,\ xy \in B$ となることと同値である.

例 7.3　S を多項式として表される $C(\mathbf{R})$ の元全体の集合とする. このとき, S は $C(\mathbf{R})$ の部分多元環である.

一方, $n \in \mathbf{N}$ を固定しておき, T を n 次以下の多項式として表される $C(\mathbf{R})$ の元全体の集合とする. このとき, T は $C(\mathbf{R})$ の部分多元環ではない. 実際, 2 つの n 次多項式の積は $2n$ 次となってしまうからである.

例 7.4　例 7.2 において, $X \subset \mathbf{R}^2$ を

$$X = \{(a,0) \,|\, a \in \mathbf{R}\}$$

により定める. このとき, X は $\mathbf{R}^2$ の部分多元環となる. X は $\mathbf{R}$ に通常の和, スカラー倍および積を考えたものと同一視することができる.

一方, $Y \subset \mathbf{R}^2$ を

$$Y = \{(0,a) \,|\, a \in \mathbf{R}\}$$

により定める． このとき, Y は $\mathbf{R}^2$ の部分多元環ではない． 実際, $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ とすると, $(0, a)$, $(0, b) \in Y$ であるが,

$$
\begin{aligned}
(0,a)(0,b) &= (0 \cdot 0 - ab, 0 \cdot b + a \cdot 0) \\
&= (-ab, 0) \\
&\notin Y
\end{aligned}
$$

となるからである．

以下では, $C(X)$ の一様収束位相を考える．まず, 次がなりたつ．

定理 7.1　X をコンパクト空間, S を $C(X)$ の部分多元環とすると, $\overline{S}$ は $C(X)$ の部分多元環である．

証明　$f, g \in \overline{S}$ とする．このとき, 閉包の性質より, S の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$
\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} d(g_n, g) = 0
$$

となるように選んでおくことができる．

まず, S は $C(X)$ の部分多元環だから, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $f_n + g_n \in S$ である．また, $x \in X$ とすると, 三角不等式より,

$$
\begin{aligned}
|(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)| &= |(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x))| \\
&\leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|
\end{aligned}
$$

である．よって,

$$
\begin{aligned}
d(f_n + g_n, f + g) &\leq d(f_n, f) + d(g_n, g) \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

となるから,

$$
\lim_{n\to\infty} d(f_n + g_n, f + g) = 0
$$

である．したがって, $f + g \in \overline{S}$ である．

次に, S は $C(X)$ の部分多元環だから, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $cf_n \in S$ である．また, $x \in X$ とすると,

$$
|(cf_n)(x) - (cf)(x)| = |c||f_n(x) - f(x)|
$$

である．よって,

$$
\begin{aligned}
d(cf_n, cf) &= |c|\, d(f_n, f) \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

となるから,

$$
\lim_{n\to\infty} d(cf_n, cf) = 0
$$

である．したがって, $cf \in \overline{S}$ である．

更に, S は $C(X)$ の部分多元環だから, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $f_n g_n \in S$ である. また, $x \in X$ とすると,

$$\begin{aligned}
|(f_n g_n)(x) - (fg)(x)| &= |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \\
&\leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| \\
&\leq (|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|)|g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)|
\end{aligned}$$

である. ここで, X はコンパクトであり, $f \in C(X)$ だから,

$$\|f\| = \max\{|f(x)| \,|\, x \in X\} \in \mathbf{R}$$

である. $\|g\|$ についても同様である. よって,

$$\begin{aligned}
d(f_n g_n, fg) &\leq (d(f_n, f) + \|f\|) d(g_n, g) + \|g\| d(f_n, f) \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となるから,

$$\lim_{n \to \infty} d(f_n g_n, fg) = 0$$

である. したがって, $fg \in \overline{S}$ である.

以上および注意 7.1 より, $\overline{S}$ は $C(X)$ の部分多元環である. □

また, 次がなりたつ.

定理 7.2 X をコンパクト空間, S を $C(X)$ の部分多元環とする. $f \in S$ ならば, $|f| \in \overline{S}$ である.

証明 $\|f\| = 0$, すなわち, $f = 0$ のときは明らかである.

$\|f\| > 0$ とする. 問題 5-3 のように, g_n, $g \in C[0,1]$ $(n \in \mathbf{N})$ を

$$\begin{cases} g_1(t) = 0, \\ g_{n+1}(t) = g_n(t) + \dfrac{t - (g_n(t))^2}{2}, \end{cases} \qquad g(t) = \sqrt{t} \quad (t \in [0,1])$$

により定める. このとき, $f_n \in C(X)$ を

$$f_n(x) = g_n\left(\left(\frac{f(x)}{\|f\|}\right)^2\right) \quad (x \in X)$$

により定める. g_n は実数係数の多項式として表され, S は $C(X)$ の部分多元環だから, $f_n \in S$ である. また, 問題 5-3 より, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ は g に一様収束するから, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $\dfrac{1}{\|f\|}|f|$ に一様収束する. よって,

$$\frac{1}{\|f\|}|f| \in \overline{S}$$

である. 更に, 定理 7.1 より,

$$\begin{aligned}
|f| &= \|f\| \left(\frac{1}{\|f\|}|f|\right) \\
&\in \overline{S}
\end{aligned}$$

である. □

問題 7

1. 2 次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbf{R})$ と表す．このとき，$M_2(\mathbf{R})$ は通常の和，スカラー倍および積によって，$\mathbf{R}$ 上の多元環となる．ここで，$A \subset M_2(\mathbf{R})$ を

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

により定める．A は $M_2(\mathbf{R})$ の部分多元環であることを示せ．

2. $f,\, g \in C(\mathbf{R})$ に対して，$f * g \in C(\mathbf{R})$ を

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める．$f * g$ を f と g の畳み込みという．このとき，置換積分法より，

$$f * g = g * f$$

であることが分かる．更に，$h \in C(\mathbf{R})$ とすると，

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

であることを示せ．なお，$C(\mathbf{R})$ を通常の和とスカラー倍によって，$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とみなし，更に，畳み込みを積とすることにより，$C(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上の多元環となる．

3. X を第一可算公理をみたす位相空間，A を X の空でない部分集合とし，$a \in \overline{A}$ とする．このとき，a に収束する A の点列が存在することを示せ．

4. X を非可算集合とし，X の余可算位相を考える．すなわち，$\mathfrak{O}$ を X の開集合系とすると，

$$\mathfrak{O} = \{O \subset X \mid X \setminus O \text{ は高々可算}\} \cup \{\emptyset\}$$

である．$A \subset X$ が非可算なとき，$\overline{A} = X$ であることを示せ．なお，$A \neq X$ のとき，$a \in X \setminus A$ とすると，a に収束する A の点列は存在しないことが分かる．

5. X をコンパクト空間とする．また，$n \in \mathbf{N}$，$n \geq 2$ とし，$f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n \in C(X)$ に対して，

$$\max(f_1, f_2 \ldots, f_n)(x) = \max\{f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots,\, f_n(x)\} \quad (x \in X)$$

とおく．

(1) $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C(X)$ となることを示せ．同様に，

$$\min(f_1, f_2 \ldots, f_n)(x) = \min\{f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots,\, f_n(x)\} \quad (x \in X)$$

とおくと，$\min(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C(X)$ となる．

(2) S を $C(X)$ の部分多元環とする．$f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n \in S$ ならば，$\max(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{S}$ となることを示せ．同様に，$f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n \in S$ ならば，$\min(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{S}$ となる．

問題 7 の解答

1. $X, Y \in A$ とし,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \quad (a,\, b,\, c,\, d \in \mathbf{R})$$

と表しておく.

まず,

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \\ &\in A \end{aligned}$$

である.

次に, $k \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} kX &= k \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ka & kb \\ -kb & ka \end{pmatrix} \\ &\in A \end{aligned}$$

である.

更に,

$$\begin{aligned} XY &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad+bc) & ac - bd \end{pmatrix} \\ &\in A \end{aligned}$$

である.

以上および注意 7.1 より, A は $M_2(\mathbf{R})$ の部分多元環である.

2. $t \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} ((f*g)*h)(t) &= (h*(g*f))(t) \\ &= \int_0^t h(t-s)(g*f)(s)\, ds \\ &= \int_0^t h(t-s) \left(\int_0^s g(s-r) f(r)\, dr \right) ds \\ &= \int_{\{(r,s) | 0 \le r \le s \le t\}} f(r) g(s-r) h(t-s)\, dr ds \\ &= \int_0^t f(r) \left(\int_r^t h(t-s) g(s-r)\, ds \right) dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t f(r)\left(\int_0^{t-r} h(t-r-u)g(u)\,du\right)dr \\
&= \int_0^t f(r)(h*g)(t-r)\,dr \\
&= ((h*g)*f)(t) \\
&= (f*(g*h))(t)
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

である.

3. X は第一可算公理をみたすから, a のある可算基本近傍系 $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が存在し,

$$U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$$

となる. 閉包の定義より, a は A の外点ではないから, 各 $n\in\mathbf{N}$ に対して, $a_n \in U_n \cap A$ を選んでおくことができる. ここで, O を $a\in O$ となる X の開集合とすると, 基本近傍系の定義より, ある $N\in\mathbf{N}$ が存在し, $U_N \subset O$ となる. 更に, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq N$ ならば,

$$
\begin{aligned}
a_n &\in U_n \\
&\subset U_N \\
&\subset O,
\end{aligned}
$$

すなわち, $a_n\in O$ である. よって, A の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は a に収束する.

4. F を $A\subset F$ となる X の閉集合とする. 余可算位相の定義より, F は高々可算であるか, または, $F=X$ である. ここで, A は非可算だから, $F=X$ である. よって, $\overline{A}=X$ である.

5. (1) n に関する数学的帰納法により示す.

$n=2$ のとき, $f_1,\ f_2\in C(X)$ だから,

$$
\begin{aligned}
\max(f_1,f_2) &= \frac{1}{2}\{(f_1+f_2)+|f_1-f_2|\} \\
&\in C(X)
\end{aligned}
$$

である.

$n=k\ (k\geq 2)$ のとき, 題意がなりたつと仮定する. このとき, $\max(f_2,\dots,f_{k+1})\in C(X)$ となるから,

$$
\begin{aligned}
\max(f_1,f_2,\dots,f_{k+1}) &= \max(f_1,\max(f_2,\dots,f_{k+1})) \\
&\in C(X)
\end{aligned}
$$

である. よって, $n=k+1$ のとき, 題意がなりたつ.

したがって, 題意がなりたつ.

(2) (1) の証明および定理 7.1, 定理 7.2 より, 題意がなりたつ.