§10. Urysohn の距離化定理

距離空間は位相空間の例であるが, 位相空間の中には距離から位相が定まらないものも存在する. 位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ に対して, X のある距離 d が存在し, d により定まる X の位相が $\mathfrak{O}$ と一致するとき, $(X, \mathfrak{O})$ または $\mathfrak{O}$ は d により距離付け可能であるというのであった. 例えば, 2 個以上の点を含む密着空間は距離付け可能ではないことが分かる. ここでは, 位相空間がどのような条件をみたすときに距離付け可能となるかについて述べよう.

まず, 位相の基底と第二可算公理について思い出しておく.

定義 10.1 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする.

$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{O}$ とする. 任意の $O \in \mathfrak{O}$ が $\mathfrak{B}$ の元からなる部分集合族 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を用いて,

$$O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

と表されるとき, $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{O}$ の基底または開基という.

$\mathfrak{O}$ の高々可算な基底が存在するとき, X は第二可算公理をみたすという.

また, 稠密かつ高々可算な部分集合をもつ位相空間は可分であるというのであった. 第二可算公理と可分性に関して, 次がなりたつ.

定理 10.1 第二可算公理をみたす位相空間は第一可算公理をみたし, かつ, 可分である.

可分な距離空間は第二可算公理をみたす.

特に, 距離空間に対して, 第二可算公理をみたすことと可分であることは同値である.

証明 第二可算公理をみたす位相空間は第一可算公理をみたし, かつ, 可分であることのみ示す.

$(X, \mathfrak{O})$ を第二可算公理をみたす位相空間とする. このとき, $\mathfrak{O}$ の高々可算な基底 $\mathfrak{B}$ が存在する.

まず, $x \in X$ に対して, x を含む $\mathfrak{B}$ の元全体の集合を $\mathfrak{U}^*(x)$ とおく. このとき, $\mathfrak{B}$ は高々可算であることより, $\mathfrak{U}^*(x)$ は高々可算である. また, U を x の近傍とすると, X のある開集合 O が存在し,

$$x \in O \subset U$$

となる. よって, 基底の定義より, x は $\mathfrak{B}$ のある元に含まれる. したがって, $\mathfrak{U}^*(x)$ は x の基本近傍系となる. 以上より, X は第一可算公理をみたす.

次に, $\mathfrak{B}$ の各元から 1 点ずつを選んで得られる X の部分集合を A とおく. このとき, $\mathfrak{B}$ は高々可算であることより, A は高々可算である. また,

$$(X \setminus A)^i \neq \emptyset$$

であると仮定すると, 空ではないある $O \in \mathfrak{B}$ が存在し,

$$O \subset (X \setminus A)^i$$

となる. これは A の定義に矛盾する. よって, A は稠密である. したがって, X は可分である. □

定理 10.1 に関連して, 第二可算公理をみたす位相空間は正規であれば, 距離空間となる. すなわち, 次がなりたつ.

定理 10.2 (Urysohn の距離化定理) 第二可算公理をみたす正規空間は距離付け可能である.

証明 $(X, \mathfrak{O})$ を第二可算公理をみたす正規空間とする.

まず, X が第二可算公理をみたすことより, $\mathfrak{O}$ の高々可算な基底 $\mathfrak{B}$ が存在する. このとき,

$$\mathfrak{M} = \{(U, V) \,|\, U,\, V \in \mathfrak{B} \setminus \{\emptyset,\, X\},\ \overline{U} \subset V\}$$

とおく. $\mathfrak{B}$ は高々可算だから,

$$\mathfrak{M} = \{(U_n, V_n) \,|\, n \in \mathbf{N},\ U_n,\, V_n \in \mathfrak{B} \setminus \{\emptyset,\, X\},\ \overline{U}_n \subset V_n\}$$

と表すことができる. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $\overline{U}_n$, V_n^c は X の互いに素な空でない閉集合である. また, X は正規だから, T_4 空間である. よって, Urysohn の補題より, ある $f_n \in C(X)$ が存在し,

$$f_n(X) \subset [0, 1], \quad f_n(\overline{U}_n) = \{0\}, \quad f_n(V_n^c) = \{1\}$$

となる.

ここで, 関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ を

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| \quad (x,\, y \in X)$$

により定める. $x,\, y \in X$, $x \neq y$ とする. X は正規だから, 第一分離公理をみたす. よって, $\{x\}$ は X の閉集合であり, $X \setminus \{y\}$ は X の開集合である. 更に,

$$\{x\} \subset X \setminus \{y\}$$

だから, 定理 9.1 および基底の定義より, ある $O \in \mathfrak{B}$ が存在し,

$$x \in O, \quad \overline{O} \subset X \setminus \{y\}$$

となる. 再び, 定理 9.1 および基底の定義より, ある $O' \in \mathfrak{B}$ が存在し,

$$x \in O', \quad \overline{O'} \subset O$$

となる. したがって, ある $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$(O', O) = (U_n, V_n)$$

となる. このとき, $x \in U_n$, $y \notin V_n$ だから,

$$f_n(x) = 0, \quad f_n(y) = 1$$

となり,

$$d(x, y) \geq \frac{1}{2^n}$$

である. 以上より, d は X の距離となる.

$\mathfrak{O}_d$ を d により定まる X の開集合系とする. また, $O \in \mathfrak{O}$, $x \in O$ とする. 上と同様に, ある $n \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$x \in U_n, \quad \overline{V}_n \subset O$$

となる. ここで, $y \in B\left(x; \frac{1}{2^n}\right)$ とすると,

$$d(x, y) < \frac{1}{2^n}$$

より,

$$|f_n(x) - f_n(y)| < 1$$

である. 更に, $x \in U_n$ より, $f_n(x) = 0$ である. よって, $f_n(y) < 1$ となり, $y \in V_n$ である. したがって,

$$B\left(x; \frac{1}{2^n}\right) \subset V_n$$

である. 以上より,

$$B\left(x; \frac{1}{2^n}\right) \subset O$$

となり, x は $\mathfrak{O}_d$ に関して, O の内点となる. 更に, x は任意だから, $O \in \mathfrak{O}_d$ となり, $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{O}_d$ である.

次に, $x \in X$ とする. $\varepsilon > 0$ に対して, $k \in \mathbf{N}$ を

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるように選んでおく. 更に, $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$O_n(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2k} \right\}$$

とおく. f_n は $\mathfrak{O}$ に関して連続だから, $O_n(x)$ は $\mathfrak{O}$ に関する x の開近傍である. よって,

$$O(x) = \bigcap_{n=1}^{k} O_n(x)$$

とおくと, $O(x)$ は $\mathfrak{O}$ に関する x の開近傍である. ここで, $y \in O(x)$ とすると,

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| \\
&< k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (|f_n(x)| + |f_n(y)|) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (1 + 1) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

となる. したがって, $y \in B(x; \varepsilon)$ である. 更に, y は任意だから, $O(x) \subset B(x; \varepsilon)$ となり, $B(x; \varepsilon)$ は $\mathfrak{O}$ に関する x の近傍である. x の ε 近傍全体の集合は x の基本近傍系となるから, $\mathfrak{O}_d \subset \mathfrak{O}$ である.

これらより, X は距離付け可能, すなわち, 第二可算公理をみたす正規空間は距離付け可能である. □

問題 9-1, 定理 10.1, 定理 10.2 より, 次がなりたつ.

定理 10.3 位相空間に対して, 第二可算公理をみたし, かつ, 正規であることと可分であり, かつ, 距離付け可能であることは同値である.

問題 10

1. $\mathfrak{B}$ を右半開区間全体の集合とすると, $\mathfrak{B}$ は $\mathbf{R}$ のある位相 $\mathfrak{O}$ の基底となる. すなわち, $\mathfrak{O}$ は $\mathbf{R}$ の下限位相, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は Sorgenfrey 直線である.

(1) $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は第一可算公理をみたすことを示せ.

(2) $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は可分であることを示せ.

(3) $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は第二可算公理をみたさないことを示せ. 特に, 定理 10.3 より, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は距離付け可能ではない.

(4) $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は正規であることを示せ.

2. X を第二可算公理をみたす T_3 空間とし, A, B を X の互いに素な空でない閉集合とする.

(1) X の開集合からなる集合族 $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が存在し,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \quad B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n, \quad \overline{U}_n \cap B = \overline{V}_n \cap A = \emptyset \quad (n \in \mathbf{N})$$

となることを示せ.

(2) $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$U_n' = U_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V}_k, \quad V_n' = V_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_k$$

とおき, 更に,

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n', \quad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n'$$

とおく. このとき, U, V は X の互いに素な開集合であり,

$$A \subset U, \quad B \subset V$$

であることを示せ.

特に, 第二可算公理をみたす T_3 空間は T_4 空間となる. 更に, Urysohn の距離化定理より, 第二可算公理をみたす正則空間は距離付け可能となる.

問題 10 の解答

1. (1) $x \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\mathfrak{U}^*(x) = \left\{ \left[x, x + \frac{1}{n} \right) \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$$

とおく．このとき, $\mathfrak{U}^*(x)$ は可算である．また, $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{O}$ の基底だから, x を含む $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ の開集合は $\mathfrak{U}^*(x)$ のある元を含む．よって, $\mathfrak{U}^*(x)$ は x の基本近傍系である．したがって, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は第一可算公理をみたす.

(2) $\mathbf{Q}$ は可算だから, $\mathbf{Q}$ が $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ において稠密であることを示せばよい．このことを背理法により示す.

$\mathfrak{O}$ に関して

$$(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})^i \neq \emptyset$$

であると仮定する．このとき, $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{O}$ の基底であることより, $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})^i$ はある右半開区間を含む．右半開区間はある有理数を必ず含むから, これは矛盾である．よって, $\mathbf{Q}$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ において稠密である.

(3) 背理法により示す.

$(X, \mathfrak{O})$ が第二可算公理をみたすと仮定する．このとき, $\mathfrak{O}$ の高々可算な基底 $\mathfrak{B}$ が存在する．ここで, $A \subset \mathbf{R}$ を

$$A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, \text{ある } O \in \mathfrak{B} \text{ に対して}, x = \min O\}$$

により定める．このとき, $\mathfrak{B}$ は高々可算であることより, A は高々可算である．また, $B \subset \mathbf{R}$ を

$$B = \{x \in \mathbf{R} \,|\, \text{ある } O \in \mathfrak{O} \text{ に対して}, x = \min O\}$$

により定める．このとき, 基底の定義より, $A = B$ である．一方, 任意の右半開区間は $\mathfrak{O}$ の元だから, $B = \mathbf{R}$ である．よって, $\mathbf{R} = A$ である．$\mathbf{R}$ は可算集合ではないから, これは矛盾である．したがって, $(X, \mathfrak{O})$ は第 2 可算公理をみたさない.

(4) まず, $x \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \setminus \{x\} &= (-\infty, x) \cup (x, +\infty) \\ &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [x - n, x) \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[x + \frac{1}{n}, x + n \right) \right) \\ &\in \mathfrak{O},\end{aligned}$$

すなわち,

$$\mathbf{R} \setminus \{x\} \in \mathfrak{O}$$

である．よって, $\{x\}$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ の閉集合である．したがって, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は第一分離公理をみたす.

次に, A, B を $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ の互いに素な空でない閉集合とする．$a \in A$ とすると，$\mathbf{R} \setminus B$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ の開集合であり, $a \in \mathbf{R} \setminus B$ である．よって, 基底の定義より, ある $x_a \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$a \in [a, x_a) \subset \mathbf{R} \setminus B$$

となる．同様に, $b \in B$ とすると, ある $x_b \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$b \in [b, x_b) \subset \mathbf{R} \setminus A$$

となる．ここで,

$$O_A = \bigcup_{a \in A} [a, x_a), \quad O_B = \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$$

とおく．このとき, O_A, O_B は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ の開集合であり,

$$A \subset O_A, \quad B \subset O_B, \quad O_A \cap O_B = \emptyset$$

となる．したがって, A と B は開集合により分離されるから, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は第四分離公理をみたす．

以上より, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ は正規である．

2. (1) $a \in A$ とする．X は T_3 空間だから, X のある開集合 U, V が存在し,

$$a \in U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

となる．このとき,

$$\overline{U} \cap B = \emptyset$$

である．また, X は第二可算公理をみたすから, X の位相の高々可算な基底 $\mathfrak{B}$ が存在する．よって, $U \in \mathfrak{B}$ とすることができる．したがって, 題意をみたす集合族 $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ が存在する．$(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ についても同様である．

(2) まず, U'_n, V'_n, U, V の定義より, これらは X の開集合であり,

$$A \subset U, \quad B \subset V$$

である．

次に, U, V の定義より,

$$U \cap V = \bigcup_{m, n \in \mathbf{N}} (U'_m \cap V'_n)$$

である．ここで, $m \geq n$ のとき, V'_n の定義より,

$$\begin{aligned} V'_n &\subset V_n \\ &\subset \overline{V}_n, \end{aligned}$$

すなわち, $V'_n \subset \overline{V}_n$ である．更に, $m \geq n$ および U'_m の定義より,

$$U'_m \cap V'_n = \emptyset$$

である．同様に, $m \leq n$ のとき,

$$U'_m \cap V'_n = \emptyset$$

である．よって,

$$U \cap V = \emptyset$$

となり, U, V は互いに素である．